माध्यमिक शिक्षा बोर्ड राजस्थान
पाठ्यक्रम परीक्षा–2023
गणित MATHEMATICS
विषय कोड(sub code)-15

कक्षा–12

इस विषय की परीक्षा योजना निम्नानुसार है–				
प्रश्नपत्र	समय(घंटे)	प्रश्नपत्र के लिए अंक	सत्रांक	पूर्णांक
एकपत्र	3:15	80	20	100

इकाई का नाम		अंक
1.	सम्बन्ध तथा फलनRELATIONS AND FUNCTIONS	7
2..	बीज गणित ALGEBRA	10
3..	कलन CALCULUS	36
4.	सदिश तथा त्रि-विमीय ज्यामिति VECTORS AND THREE - DIMENSIONAL GEOMETRY	16
5.	रैखिक प्रोग्रामन LINEAR PROGRAMMING	4
6.	प्रायिकता PROBABILITY	7

इकाई-1 सम्बन्ध तथा फलन RELATIONS AND FUNCTIONS

1. सम्बन्ध तथा फलन 3

सम्बन्धों के प्रकार : स्वतुल्य, सममित, संक्रामक तथा तुल्यता सम्बन्ध, एकैकी तथा आच्छादक फलन, फलनों का संयोजन तथा व्युत्क्रमणीय फलन, द्विआधारी संक्रियाएं।

Relations and Functions :

Types of relations: reflexive, symmetric, transitive and equivalence relations. One to one and onto functions Composition of Functions and Invertible Function. Binary operations.

2. प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन 4

आधारभूत संकल्पनाएँ,प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के गुणधर्म

2. Inverse Trigonometric Functions

Basic Concepts, Properties of Inverse Trigonometric Functions

इकाई-2 बीज गणित ALGEBRA

3. आव्यूह 5

आव्यूह, आव्यूह की कोटि, आव्यूहों के प्रकार: स्तंभ आव्यूह, पंक्ति आव्यूह, वर्ग आव्यूह, विकर्ण आव्यूह, अदिश आव्यूह, तत्समक आव्यूह, शून्य आव्यूह आव्यूहों पर संक्रियाएँ , आव्यूहों का योग , एक आव्यूह का एक अदिश से

गुणन, आव्यूहों के योग के गुणधर्म, एक आव्यूह के अदिश गुणन के गुणधर्म, आव्यूहों का गुणन, आव्यूहों के गुणन के गुणधर्म, आव्यूह का परिवर्त, आव्यूहों के परिवर्त के गुणधर्म, सममित तथा विषम सममित आव्यूह, आव्यूह पर प्रारंभिक संक्रिया (आव्यूह रूपांतरण), व्युत्क्रमणीय आव्यूह

Matrices:

Matrices, Order of a matrix, Types of matrices: Column matrix, Row matrix,Square matrix, Diagonal matrix, Scalar matrix, Identity matrix,zero matrix, Operations on Matrices, Addition of matrices, Multiplication of a matrix by a scalar, Properties of matrix addition, Properties of scalar multiplication ofa matrix, Multiplication of matrices, Properties of multiplication of matrices,Transpose of a Matrix, Properties of transpose of matrices, Symmetric and Skew Symmetric, Elementary Operation, Invertible Matrices (Transformation) of a matrix.

4. सारणिक 5

सारणिक एक कोटि के आव्यूह का सारणिक, द्वितीय कोटि के आव्यूह का सारणिक, 3x3 कोटि के आव्यूह का सारणिक,सारणिकों के गुणधर्म, त्रिभुज का क्षेत्रफल,उपसारणिक और सहखंड आव्यूह के सहखंडज और व्युत्क्रम, सारणिकों और आव्यूहों के अनुप्रयोग।

Determinants:

Determinant , Determinant of a matrix of order one , Determinant of a matrix of order two, Determinant of a matrix of order 3×3 ,properties of determinants, Area of a Triangle minors and cofactors Adjoint and inverse of a matrix. Applications of Determinants andMatrices.

इकाई-3 कलनCALCULUS

5.सांतत्य तथा अवकलनीयता 8

सांतत्य, संतत फलनों का बीजगणितअवकलनीयता, संयुक्त फलनों का अवकलज, अस्पष्ट फलनों के अवकलज, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज , चरघातांकी तथा लघुगणकीय फलनए लघुगणकीय अवकलन, फलनों के प्राचलिक रूपों के अवकलज, द्वितीय कोटि का अवकलज, माध्यमान प्रमेय

5.Continuity and Differentiability:

Continuity ,Algebra of continuous functions differentiability, Derivatives of composite functions, Derivatives of Implicit Functions, Derivatives of Inverse Trigonometric Functions , Exponential and Logarithmic Functions , Logarithmic Differentiation, Derivatives of Functions in Parametric Forms, Second Order Derivative, Mean Value Theorem

6. अवकलजों के अनुप्रयोग 6

अवकलजों के अनुप्रयोग : राशियों के परिवर्तन की दर, वर्धमान व ह्रासमान फलन, स्पर्श रेखाएं और अभिलंब, अवकलजों के द्वारा सन्निकटन, उच्चतम तथा निम्नतम एक संवृत्त अंतराल में किसी फलन का उच्चतम और निम्नतम मान , व्यावहारिक विधि विविध उदाहरण

Applications of Derivatives:

Applications of derivatives: Rate of Change of Quantities, increasing and decreasing functions, Tangents and Normals, use of derivatives in approximation, maxima and minima, Maximum and Minimum Values of a Function in a Closed Interval , Working Rule

7. समाकलन 12

समाकलन को अवकलन के व्युत्क्रम प्रक्रम के रूप मेंअनिश्चित समाकलन का ज्यामितीय निरूपण, अनिश्चित समाकलनों के कुछ गुणधर्म, अवकलन एवं समाकलन की तुलना, समाकलन की विधियाँ प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन, त्रिकोणमितीय सर्व-समिकाओं के उपयोग द्वारा समाकलन, कुछ विशिष्ट फलनों के समाकलन, आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन, खंडश: समाकलन, कुछ अन्य प्रकार के समाकलन, निश्चित समाकलन , योगफल की सीमा के रूप में निश्चित समाकलन, कलन की आधारभूत प्रमेय: क्षेत्रफल फलन, प्रमेय-1 समाकलन गणित की प्रथम आधारभूत प्रमेय। समाकलन गणित की द्वितीय आधारभूत प्रमेय, प्रतिस्थापन द्वारा निश्चित समाकलनों का मान ज्ञात करना, निश्चित समाकलनों के कुछ गुणधर्म।

Integrals:

Integration as inverse process of differentiation: Geometrical interpretation of indefinite integral, Some properties of indefinite integrals, Comparision between differentiation and integration, Methods of Integration, Integration by substitution, Integrals of Some Particular Functions, Integration by Partial Fractions, Integration by Parts:(Integrals of some more types, Definite Integral, Definite integral as the limit of a sum, Fundamental Theorem of Calculus: Area function, First fundamental theorem of integral calculus, Second fundamental theorem of integral calculus, Evaluation of Definite Integrals by Substitution, Some Properties of Definite Integrals

8. समाकलनों के अनुप्रयोग 4

साधारण वक्रों के अन्तर्गत क्षेत्रफल:एक वक्र एवं एक रेखा से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफलदो वक्रों के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल, वृत्त/परवलयों/दीर्घवृत्तों (जो केवल मानक रूप में हैं) का क्षेत्रफल, उपरोक्त दो वक्रों के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल (ऐसा क्षेत्र जो स्पष्ट रूप से पहचान में आ सके)

Applications of the Integrals:

area under simple curves: *The area of the region boundedby a curve and a line,*Area Between Two Curves,, areas of circles,parabolas/ellipses (in standard form only), area between the two above said curves(the region should be clearly identifiable).

9. अवकल समीकरण Differential Equations **4**

आधारभूत संकल्पनाएँ :अवकल समीकरण की कोटि, अवकल समीकरण की घातअवकल समीकरण का व्यापक एवं विशिष्ट हल, दिए हुए व्यापक हल वाले अवकल समीकरण का निर्माण, दिए हुए वक्रों के कुल को निरूपित करने वाले अवकल समीकरण के निर्माण की प्रक्रियाप्रथम कोटि एवं प्रथम घात के अवकल समीकरणों को हल करने की विधियाँ, पृथक्करणीय चर वाले अवकल समीकरण,समघातीय अवकल समीकरण, रैखिक अवकल समीकरण।

Basic Concepts: Order of a differential equation, Degree of a differential equation, General and Particular Solutions of a Differential Equation, Formation of a Differential Equation whose Solution is Given, Procedure to form a Differential Equation that will represent a given Family of curves, Differential equations with variables separable, Homogenous differential equations. Linear differential equations.

इकाई- 4

10.सदिश तथा त्रि-विमीय ज्यामिति VECTORS AND THREE-DIMENSIONAL GEOMETRY 7

आधारभूत संकल्पनाएँ,सदिशों के प्रकार,सदिशों का योगफल, एक अदिश से सदिश का गुणन, एक सदिश के घटक, दो बिंदुओं को मिलाने वाला सदिश,खंड सूत्रदो सदिशों का गुणनफल,दो सदिशों का अदिश गुणनफल,एक सदिश का किसी रेखा पर प्रक्षेप, दो सदिशों का सदिश गुणनफल ।

Basic Concepts. Types of Vectors. Addition of Vectors. Multiplication of a Vector by a Scalar. *Components of a vector. Vector joining two points. Section Formula.* Product of Two Vectors. *Scalar (or dot) product of two vectors. Projection of a vector on a line. Vector (or cross) product of two vectors.*

11.त्रि-विमीय ज्यामिति Three Dimensional Geometry **09**

रेखा के दिक्-कोसाइन और दिक्-अनुपात,रेखा की दिक्-कोसाइन में संबंध, दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा की दिक्-कोसाइन,अंतरिक्ष में रेखा का समीकरण,दिए गए बिंदु A से जाने वाली तथा दिए गए सदिश b के समांतर रेखा का समीकरण, दो दिए गए बिंदुओं से जाने वाली रेखा का समीकरण, दो रेखाओं के मध्य कोण,दो रेखाओं के मध्य न्यूनतम दूरी, दो विषमतलीय रेखाओं के बीच की दूरी, समांतर रेखाओं के बीच की दूरी, समतल अभिलंब रूप में समतल का समीकरण,एक दिए सदिश के अनुलंब तथा दिए बिंदु से होकर जाने वाले समतल का समीकरण,तीन असंरेखीय बिंदुओं से होकर जाने वाले समतल का समीकरण,समतल के समीकरण का अंत, खंड-रूप, दो दिए समतलों के प्रतिच्छेदन से होकर जाने वाला समतल, दो रेखाओं का सह-तलीय होना,दो समतलों के बीच का कोण,समतल से दिए गए बिंदु की दूरी सदिश रूप एवं कार्तीक रूप, एक रेखा और एक समतल के बीच का कोण,विविध उदाहरण

Direction Cosines and Direction Ratios of a Line. Relation between the direction cosines of a line. Direction cosines of a line passing through two points. Equation of a Line in Space. Equation of a line through a given point A and parallel to a given vector b. Equation of a line passing through two given points. Angle between two lines. Shortest Distance between two lines. Distance between two skew lines. Distance between parallel lines. Plane. Equation of a Plane in normal form. Equation of a plane perpendicular to a given vector and passing through a given point. Equation of a plane passing through three non-collinear points. Intercept form of the equation of a plane. Plane passing through the intersection of two given planes. Co planarity of two lines. Angle between two planes. Distance of a point from a plane. Vector Form and Cartesian form. Angle between a line and a plane.

इकाई-12 रैखिक प्रोग्रामन LINEAR PROGRAMMING 4

रैखिक प्रोग्रामन

भूमिका, सम्बन्धित पदों की परिभाषा जैसे व्यवरोध, उद्देश्य फलन, इष्टतम हल, रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं के विभिन्न प्रकार, रैखिक प्रोग्रामन (LP) समस्याओं का गणितीय सूत्रण, दो चरों में दी गई समस्याओं का आलेखीय हल, सुसंगत तथा असुसंगत क्षेत्र, सुसंगत तथा असुसंगत हल, इष्टतम सुसंगत हल (तीन अतुच्छ व्यवरोधों तक)

Linear Programming

Introduction, definition of related terminology such as constraints, objective function, optimization, different types of linear programming (L.P.) problems, mathematical formulation of L.P. problems, graphical method of solution for problems in two variables, feasible and infeasible regions, feasible and infeasible solutions, optimal feasible solutions (up to three non-trivial constraints).

इकाई-13 प्रायिकता PROBABILITY

प्रायिकता 7

सप्रतिबंध प्रायिकता, सप्रतिबंध प्रायिकता के गुण प्रायिकता का गुणन नियम, स्वतंत्र घटनाएं, कुल प्रायिकता, बेज प्रमेय, यादृच्छिक चर और उसका प्रायिकता बंटन, यादृच्छ चर का माध्य तथा प्रसरण, बरनौली परीक्षण तथा द्विपद बंटन।

Probability Conditional probability, Properties of conditional probability, Multiplication theorem on probability, independent events, total probability, Baye's theorem, theorem of total probability , Random variable and its probability distribution, Probability distribution of a random, variable. mean and variance of random variable. Repeated independent (Bernoulli) trials and Binomial distribution.

निर्धारित पुस्तकें -

1. **गणित भाग -1-** एन.सी.ई.आर.टी. से प्रतिलिप्याधिकार अन्तर्गत प्रकाशित

   Mathematics Part I - Text Book for class XII NCERT's Published under Copyright

2. **गणित भाग -2-** एन.सी.ई.आर.टी. से प्रतिलिप्याधिकार अन्तर्गत प्रकाशित

   Mathematics Part II - Text Book for class XII NCERT's Published under Copyright

विवरणिका

1) सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय **R** में R $= \{(a, b) : a \leq b^2\}$, द्वारा परिभाषित सम्बन्ध R, न तो स्वतुल्य है, न सममित है और न ही संक्रामक है।

हल— **R** = वास्तविक संख्याओं का समुच्चय
R $= \{(a, b) : a \leq b^2\}$, वास्तविक संख्याओं पर परिभाषित सम्बन्ध है।

(i) R स्वतुल्य नहीं है क्योंकि $\frac{1}{2} \nleq \left(\frac{1}{2}\right)^2$
$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin R$

(ii) R सममित नहीं है क्योंकि यदि $a = 2, b = 5$
तब $2 \leq 5^2 \Rightarrow (2, 5) \in R$
लेकिन $5 \nleq 2^2 \Rightarrow (5, 2) \notin R$
अतः $(2, 5) \in R \Rightarrow (5, 2) \notin R$

(iii) R संक्रामक नहीं है। मान लीजिए $a = 2, b = -2$ और $c = -1$ तब $2 < (-2)^2, -2 < (-1)^2$ परन्तु $2 \nleq (-1)^2$
अतः $(2, -2), \in R, (-2, -1) \in R \Rightarrow (2, -1) \in R$
इस प्रकार R स्वतुल्य, सममित व संक्रामक में कोई भी नहीं है।

2) सिद्ध कीजिए कि **R** में R $= \{(a, b) : a \leq b\}$, द्वारा परिभाषित सम्बन्ध R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किन्तु सममित नहीं है।

हल— **R** = वास्तविक संख्याओं का समुच्चय
R $= \{(a, b) : a \leq b\}$

(i) R स्वतुल्य है क्योंकि $a \leq a$ सत्य है क्योंकि $a = a$, $\forall a, \in R$

(ii) R सममित नहीं है। यदि a, b से कम है तो b, a से कम नहीं है।

(iii) R संक्रामक है। यदि $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c, \forall a, b, c \in R$
$\Rightarrow$ R स्वतुल्य और संक्रामक है परन्तु सममित नहीं है।

(इतिसिद्धम्)

3) सिद्ध कीजिए कि समस्त त्रिभुजों के समुच्चय A में, R = {(T_1, T_2) : T_1, T_2 के समरूप है} द्वारा परिभाषित सम्बन्ध R एक तुल्यता सम्बन्ध है। भुजाओं 3, 4, 5 वाले समकोण त्रिभुज T_1, भुजाओं 5, 12, 13 वाले समकोण त्रिभुज T_2 तथा भुजाओं 6, 8, 10 वाले समकोण त्रिभुज T_3 पर विचार कीजिए। T_1, T_2 और T_3 में से कौनसे त्रिभुज परस्पर सम्बन्धित हैं?

हल— A = एक समतल में त्रिभुजों का समुच्चय

R = (T_1, T_2) : T_1 और T_2 समरूप त्रिभुज है}

(i) R स्वतुल्य है। प्रत्येक त्रिभुज अपने समरूप है।

R सममित है। यदि त्रिभुज T_1 त्रिभुज T_2 के समरूप है तो त्रिभुज T_2 त्रिभुज T_1 के भी समरूप है।

R संक्रामक है। यदि त्रिभुज T_1, T_2 और त्रिभुज T_2, T_3 समरूप हैं तो त्रिभुज T_1, T_3 भी समरूप हैं।

$\Rightarrow$ R तुल्यता सम्बन्ध है।

(ii) त्रिभुज T_1 की भुजाएँ 3, 4, 5 हैं, त्रिभुज T_2 की भुजाएँ 5, 12, 13 हैं तथा त्रिभुज T_3 की भुजाएँ 6, 8, 10 हैं। त्रिभुज T_1 और T_3 की भुजाएँ समानुपाती हैं अर्थात्

$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$, इसलिए यह समरूप है।

$\Rightarrow$ त्रिभुज T_1 और T_3 आपस में सम्बन्धित हैं। **उत्तर**

4) मान लीजिए कि समुच्चय $\{1, 2, 3, 4\}$ में, $R = \{(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)\}$ द्वारा परिभाषित सम्बन्ध R है। निम्नलिखित में से सही उत्तर चुनिए :

(A) R स्वतुल्य तथा सममित है किन्तु संक्रामक नहीं है।

(B) R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किन्तु सममित नहीं है।

(C) R सममित तथा संक्रामक है किन्तु स्वतुल्य नहीं है।

(D) R एक तुल्यता सम्बन्ध है।

हल— यहाँ पर $A = \{1, 2, 3, 4\}$

एवं $R = \{(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)\}$

R स्वतुल्य एवं संक्रामक है, लेकिन सममित नहीं है क्योंकि $(1, 2) \in R$ परन्तु $(2, 1) \notin R$ अत: सही उत्तर B है।

5) सिद्ध कीजिए कि $f(x) = [x]$ द्वारा प्रदत्त महत्तम पूर्णांक फलन $f : R \to R$, न तो एकैकी है और न आच्छादक है, जहाँ $[x]$, x से कम या उसके बराबर महत्तम पूर्णांक को निरूपित करता है।

हल— $f : R \to R$ जबकि $f(x) = [x]$ = महत्तम पूर्णांक फलन

$f(1.3) = 1, f(1.6) = 1$

$\therefore$ 1.3 और 1.6 का प्रतिबिम्ब एक ही है। इसलिए f एकैकी नहीं है।

साथ ही प्रान्त f में $x \in R$ का प्रतिबिम्ब एक पूर्णांक है। अत: सहप्रान्त का अवयव जो पूर्णांक न हो, वह प्रान्त के किसी भी अवयव का प्रतिबिम्ब नहीं है।

$\therefore f$ आच्छादक नहीं है।

$\Rightarrow f$ न ही एकैकी है और न ही आच्छादक है। (**इतिसिद्धम्**)

6. मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ तथा $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ A से B तक एक फलन है। सिद्ध कीजिए कि f एकैकी है।

हल— $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$

$f : A \to B$ इस प्रकार है कि $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$

A के भिन्न-भिन्न अवयवों के भिन्न-भिन्न प्रतिबिम्ब B में है।

$\therefore f$ एकैकी है क्योंकि $f(1) = 4$, $f(2) = 5$, $f(3) = 6$ **उत्तर**

7) मान लीजिए कि $f : \{1, 3, 4\} \to \{1, 2, 5\}$ तथा $g : \{1, 2, 5\} \to \{1, 3\}$, $f = \{(1, 2), (3, 5), (4, 1)\}$ तथा $g = \{(1, 3), (2, 3), (5, 1)\}$ द्वारा प्रदत्त हैं। gof ज्ञात कीजिए।

हल— $f : \{1, 3, 4\} \to \{1, 2, 5\}$, $g : \{1, 2, 5\} \to \{1, 3\}$

$$f = \{(1, 2), (3, 5), (4, 1)\},$$

$$g = \{(1, 3), (2, 3), (5, 1)\}$$

$$\Rightarrow \quad f(1) = 2, f(3) = 5, f(4) = 1$$

और $$g(1) = 3, g(2) = 3, g(5) = 1$$

$$gof(1) = g[f(1)] = g(2) = 3$$

$$gof(3) = g[f(3)] = g(5) = 1$$

$$gof(4) = g[f(4)] = g(1) = 3$$

$$\Rightarrow \quad gof = \{(1, 3), (3, 1), (4, 3)\}$$ **उत्तर**

8) gof तथा fog ज्ञात कीजिए, यदि

(i) $f(x) = |x|$ तथा $g(x) = |5x - 2|$

(ii) $f(x) = 8x^3$ तथा $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$

हल— (i) $f(x) = |x|$ तथा $g(x) = |5x - 2|$

$gof\ (x) = g[f(x)] = g\ (|x|) = |5|\ x\ |- 2 =$

$\{|5x - 2|$, यदि $x \geq 0$

$|- 5x - 2|$, यदि $x < 0$

$fog\ (x) = f\ [g(x)] = f\ (|5x - 2|)$

$= ||5x - 2|| = |5x - 2|\ [\because\ ||Z|| = |Z|]$

(ii) $f(x) = 8x^3$ तथा $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$gof\ (x) = g\ [f(x)] = g\ (8x^3) = \left(8x^3\right)^{\frac{1}{3}} = 2x$

$fog\ (x) = f\ [g(x)]$

$= f\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = 8.\left(x^{1/3}\right)^3 = 8x$ उत्तर

9) मान लीजिए कि $f : X \rightarrow Y$ एक व्युत्क्रमणीय फलन है। सिद्ध कीजिए कि f का प्रतिलोम फलन अद्वितीय (unique) है।

हल— $f : X \rightarrow Y$ तथा f व्युत्क्रमणीय है।

$\therefore f$ एकैकी व आच्छादक है।

$$\Rightarrow \quad gof(x) = I_X \; fog(y) = I_Y$$

मान लीजिए कि f के दो प्रतिलोम g_1 और g_2 हैं।

$$fog_1(y) = I_Y \; fog_2(y) = I_Y$$

$$\because \quad (fog_1)\ (y) = (fog_2)\ (y) = y$$

$$\Rightarrow \quad f\ [g_1\ (y)] = f\ (g_2\ (y)]$$

$$\Rightarrow \quad g_1\ (y) = g_2\ (y)$$ [$\because f$ एकैकी है।]

$$\Rightarrow \quad g_1 = g_2$$

$\therefore f$ का प्रतिलोम भी अद्वितीय है। **उत्तर**

10) यदि $f : R \rightarrow R$, $f(x) = (3 - x^3)^{\frac{1}{3}}$, द्वारा प्रदत्त है, तो $fof(x)$ बराबर है—

(A) $x^{\frac{1}{3}}$

(B) x^3

(C) x

(D) $(3 - x^3)$

हल— $fof(x) = f[f(x)] = f\left[(3-x^3)^{\frac{1}{3}}\right] = \left[3-\left\{(3-x^3)^{\frac{1}{3}}\right\}^3\right]^{\frac{1}{3}}$

$$= \left[3-(3-x^3)\right]^{\frac{1}{3}} = (x^3)^{\frac{1}{3}} = x$$

अतः सही विकल्प (C) है।

11) समुच्चय $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ में $a \wedge b =$ निम्नतम $\{a, b\}$ द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रिया पर विचार कीजिए। संक्रिया $\wedge$ के लिए संक्रिया सारणी लिखिए।

हल— समुच्चय $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ पर $\wedge$ संक्रिया $a \wedge b =$ निम्नतम $\{a, b\}$ द्वारा परिभाषित है।

अभीष्ट सारणी निम्नानुसार है :

$a \wedge b =$ निम्नतम $\{a, b\}$

$1 \wedge 1 =$ निम्नतम $\{1, 1\} = 1$

$4 \wedge 3 =$ निम्नतम $\{4, 3\} = 3$

इसी प्रकार $2 \wedge 1 =$ निम्नतम $\{2, 1\} = 1$

^	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3
4	1	2	3	4	4
5	1	2	3	4	5

12) क्या समुच्चय $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ में $a * b = a$ तथा b का LCM द्वारा परिभाषित * एक द्विआधारी संक्रिया है? अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

हल— माना कि समुच्चय $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

* संक्रिया $a * b = a, b$ का L.C.M. एक द्विआधारी संक्रिया है।

अब $3 * 4 = 12$, $4 * 5 = 20$, $3 * 5 = 15$

12, 15, 20 समुच्चय A में नहीं है।

$\Rightarrow$ * द्विआधारी संक्रिया नहीं है। **उत्तर**

13) दो फलनों $f : N \to Z$ तथा $g : Z \to Z$ के उदाहरण दीजिए जो इस प्रकार हों कि, gof एकैक है परन्तु g एकैक नहीं है। (संकेत : $f(x) = x$ तथा $g(x) = |x|$ पर विचार कीजिये।)

हल— $f : N \to Z$ तथा $g : Z \to Z$ को परिभाषित किया है

$$f(x) = -x,\ g(x) = |x| \text{ से}$$

$$g(x) = |x|, -1, 1 \text{ दोनों का प्रतिबिम्ब } 1 \text{ है।}$$

$\therefore g$ एकैकी नहीं है।

परन्तु $gof : N \to Z$ तथा

$$g(f(x)) = g(-x) = |-x| = |x|$$

$$\Rightarrow \qquad g(f(x)) = |x| = x$$

$\therefore gof$ एकैकी है। **उत्तर**

14) समुच्चय $\{1, 2, 3, \ldots.., n\}$ से स्वयं तक के समस्त आच्छादक फलनों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल— माना कि

Y	1	2	3	.....	n
X	1	2	3	.....	n

समुच्चय Y का प्रत्येक अवयव समुच्चय X के किसी न किसी अवयव का प्रतिबिम्ब है।

इस प्रकार X और Y के अवयवों में सम्बन्ध $n(n-1)(n-2) \ldots.. 3 . 2 . 1 = n!$ तरीकों से हो सकता है।

अतः दिए गए समुच्चय से स्थल तक समस्त आच्छादक फलनों की संख्या = $\underline{|n}$ **उत्तर**

15. यदि A = {1, –1} हो तो बताइये कि गुणन A पर एक द्विचर संक्रिया है या नहीं?

हल– दिये गये समुच्चय

$A = \{1, -1\}$

गुणन A पर द्विचर संक्रिया है क्योंकि

$1 \times 1 = 1 \in A$

$(1) \times (-1) = -1 \in A$

$(-1) \times (-1) = 1 \in A$

16) जाँच कीजिए कि क्या R में,

$$R = \{(a, b) : a \leq b^3\}$$

द्वारा परिभाषित सम्बन्ध स्वतुल्य, सममित अथवा संक्रामक है ?

हल : दिया हुआ सम्बन्ध,

$$R = \{(a, b) : a \leq b^3\},$$

जहाँ a तथा b वास्तविक संख्याएँ हैं।

(i) $\forall a \in R$

(*R* वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है)

$$a \not\leq a^3$$

$\therefore$ $a \not R a$

$\therefore$ $(a, a) \notin R$ $\therefore$ R स्वतुल्य नहीं है।

उदाहरणार्थ, वास्तविक संख्या $\frac{1}{4}$ के लिए,

$$\frac{1}{4} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

17) सिद्ध कीजिए कि समुच्चय,

$$A = \{x \in Z : 0 \le x \le 12\},$$

में दिए गए निम्नलिखित सम्बन्धों R में से प्रत्येक एक तुल्यता सम्बन्ध है :

(i) $R = \{(a, b) : |a - b|$, 4 का एक गुणज है $\}$

(ii) $R = \{(a, b) : a = b\}$

प्रत्येक दशा में 1 से सम्बन्धित अवयवों को ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया समुच्चय

$$A = \{x \in Z : 0 \le x \le 12\}$$

या $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

(i) $R = \{(a, b) : |a - b|$, 4 का एक गुणज है$\}$

अतः $R = \{(0, 0), (0, 4), (0, 8), (0, 12), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9), (10, 10), (11, 11), (12, 12), (1, 5), (1, 9), (2, 6), (2, 10), (3, 7), (3, 11), (4, 8), (4, 12), (5, 9), (6, 10), (7, 11), (8, 12)\}$

(a) R स्वतुल्य है, क्योंकि किसी $a \in A$ के लिए,

$|a - a| = 0$, जो कि 4 का गुणज है, क्योंकि $0 \times 4 = 0$

$\Rightarrow (a, a) \in R$

$\Rightarrow aRa$, सत्य है।

(b) R सममित है, क्योंकि $a, b \in A$ के लिए,

$(a, b) \in R$

$\Rightarrow |a - b|$, 4 का एक गुणज है

$\Rightarrow |a - b| = 4k$, जहाँ k एक प्राकृत संख्या है

$\Rightarrow |-(b - a)| = 4k$, जहाँ k एक प्राकृत संख्या है

$\Rightarrow |b - a| = 4k$, जहाँ k एक प्राकृत संख्या है

$\Rightarrow (b, a) \in R$

अतः $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

या $aRb \Rightarrow bRa$

(c) R संक्रामक है, क्योंकि $a, b, c \in A$ के लिए,

यदि $(a, b) \in R$ तथा $(b, c) \in R$

$\Rightarrow |a - b|$, 4 का एक गुणज है तथा $|b - c|$, 4 का एक गुणज है।

$\Rightarrow |a - b| = 4m$ तथा $|b - c| = 4n$,

जहाँ m तथा n प्राकृत संख्याएँ हैं।

$\Rightarrow a - b = \pm 4m$ तथा $b - c = \pm 4n$

$\Rightarrow a - b + b - c = \pm 4m + (\pm 4n)$

$\Rightarrow (a - c) = \pm 4m + (\pm 4n)$

$= \pm 4(m + n)$, 4 का गुणज है

$\Rightarrow |a - c| = 4k$, 4 का गुणज है

जहाँ $k = m + n$ तथा k एक प्राकृत संख्या है।

$\Rightarrow (a, c) \in R$

अतः $(a, b) \in R, (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

या aRb तथा $bRc \Rightarrow aRc$

हम देखते हैं कि सम्बन्ध R दिए गए प्रतिबन्ध के अनुसार दिए गए समुच्चय में स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक है।

अतः सम्बन्ध R, समुच्चय A पर एक तुल्यता सम्बन्ध है।

पुनः माना $|1-x| \in R$ तब $|1-x|$, 4 का एक गुणज है।

$\Rightarrow \qquad |1-x| = 0, 4, 8, 12 \in A$

$\Rightarrow$ जब $x = 1$, तब $|1-1| = 0$, जो 4 का गुणज है।

जब $x = 5$, तब $|1-5| = |-4| = 4$, जो 4 का गुणज है।

जब $x = 9$, तब $|1-9| = |-8| = 8$, जो 4 का गुणज है।

$\therefore \qquad x = 1, 5, 9$

अतः समुच्चय A के अवयव जो 1 से सम्बन्ध R के द्वारा सम्बन्धित है, का समुच्चय $\{1, 5, 9\}$ है।

(ii) $R = \{(a, b) : a = b\}$

तथा $\qquad A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

अतः $R = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9), (10, 10), (11, 11), (12, 12)\}$

(a) R स्वतुल्य है, क्योंकि

$$a = a \Rightarrow (a, a) \in R$$

या $\qquad aRa$, सत्य है।

(b) R सममित है, क्योंकि $a, b \in A$ के लिए,

यदि $\qquad (a, b) \in R \Rightarrow a = b$

$\Rightarrow b = a$

$\Rightarrow (b, a) \in R$

अतः $\qquad (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$, सत्य है

या $\qquad aRb \Rightarrow bRa$, सत्य है।

(c) R संक्रामक है, क्योंकि $a, b, c \in A$ के लिए

$(a, b) \in R$ तथा $(b, c) \in R$

$\Rightarrow a = b$ तथा $b = c$

$\Rightarrow a = b = c$

$\Rightarrow a = c$

$\Rightarrow (a, c) \in R$

अतः $(a, b) \in R$ तथा $(b, c) \in R$

$\Rightarrow (a, c) \in R$, सत्य है

या $\qquad aRb$ तथा $bRc \Rightarrow aRc$, सत्य है।

हम देखते हैं कि सम्बन्ध R, दिए गए समुच्चय A में प्रतिबन्ध के अनुसार, स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक है। अतः R, समुच्चय A पर एक तुल्यता सम्बन्ध है।

पुनः 1 से सम्बन्धित समुच्चय (प्रतिबन्ध के अनुसार) $\{1\}$ है।

इति सिद्धम्।

18) मान लीजिए XY-तल में स्थित समस्त रेखाओं का समुच्चय L है और L में, $R = \{(L_1, L_2) : L_1$ समान्तर है L_2 के$\}$ द्वारा परिभाषित सम्बन्ध R है। सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता सम्बन्ध है। रेखा $y = 2x + 4$ से सम्बन्धित समस्त रेखाओं का समुच्चय ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्नानुसार,

समुच्चय $L = XY$-तल में समस्त रेखाओं का समुच्चय

या $\quad L = \{x : x, XY$-तल में एक रेखा है$\}$

R, समुच्चय L पर परिभाषित एक सम्बन्ध इस प्रकार है कि

$$R = \{(L_1, L_2) : L_1 \text{ समान्तर है } L_2 \text{ के}\}$$

जहाँ $\qquad L_1, L_2 \in L$

(i) R स्वतुल्य है, क्योंकि प्रत्येक रेखा स्वयं के समान्तर होती है अर्थात् $L_1 \parallel L_1$ सत्य है।

या $\qquad L_1RL_1$ या $(L_1, L_1) \in R$.

(ii) R सममित है, क्योंकि यदि रेखा L_1, रेखा L_2 के समान्तर है तो रेखा L_2, रेखा L_1 के समान्तर होगी

अर्थात् $\qquad L_1 \parallel L_2 \Rightarrow L_2 \parallel L_1$

या $\qquad L_1RL_2 \Rightarrow L_2RL_1$

या $\qquad (L_1, L_2) \in R \Rightarrow (L_2, L_1) \in R$.

(iii) R संक्रामक है, क्योंकि यदि रेखा L_1, रेखा L_2 के समान्तर है तथा रेखा L_2, रेखा L_3 के समान्तर है, तो रेखा L_1, रेखा L_3 के समान्तर होगी अर्थात्

$L_1 \parallel L_2, L_2 \parallel L_3 \Rightarrow L_1 \parallel L_3; L_1, L_2, L_3 \in L$

या $(L_1, L_2) \in R, (L_2, L_3) \in R \Rightarrow (L_1, L_3) \in R$

या $L_1RL_2, L_2RL_3 \Rightarrow L_1RL_3$

हम देखते हैं कि सम्बन्ध R, समुच्चय L पर स्वतुल्य, सममित तथा संक्रमक है। अतः R, समुच्चय L पर तुल्यता सम्बन्ध है।

पुनः रेखा $y = 2x + 4$ की ढाल (प्रवणता) (slope) 2 है। अतः रेखा $y = 2x + 4$ से सम्बन्धित सभी रेखाओं का समुच्चय वे रेखाएँ होंगी जिनकी ढाल (प्रवणता) (slope) 2 होगी। इस प्रकार $y = 2x + 4$ से सम्बन्धित रेखाओं का समुच्चय $y = 2x + k$ है, जहाँ k कोई भी स्वेच्छ अचर है।

1) $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$

हल— माना कि $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right) = y$

$$\therefore \quad \tan y = -\sqrt{3} = -\tan\frac{\pi}{3}$$

$$= \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$\because$ मुख्य मान शाखा का परिसर $= \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore$ $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$ उत्तर

2) $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

हल— मान लिया $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = y$

$$\therefore \quad \sec y = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sec\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$\because$ $\sec^{-1} x$ के मुख्य मान शाखा का परिसर $= [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ है।

$\therefore$ $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$ उत्तर

3) यदि $\sin^{-1} x = y$, तो

(A) $0 \le y \le \pi$ (B) $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

(C) $0 < y < \pi$ (D) $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

उत्तर– (B)

हल– $\sin^{-1} x = y$

$\sin^{-1} x$ के मुख्य मान का परिसर $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ होता है।

अतः $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

या $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

अतः सही विकल्प (B) है।

4) $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ का मान बराबर है—

(A) π (B) $-\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$

उत्तर– (B)

हल– $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$

माना $\tan^{-1}\sqrt{3} = \theta_1$ एवं $\sec^{-1}(-2) = \theta_2$

$\Rightarrow \tan\theta_1 = \sqrt{3}$ एवं $\sec\theta_2 = -2 \Rightarrow \sec\theta_2 = -\sec\frac{\pi}{3}$

$\therefore \tan\theta_1 = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$ एवं $\sec\theta_2 = \sec\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$= \sec\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$\therefore \theta_1 = \frac{\pi}{3}$ एवं $\theta_2 = \frac{2\pi}{3}$

अतः $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2) = \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{-\pi}{3}$

अतः सही विकल्प (B) है।

निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए :

5) $3 \sin^{-1} x = \sin^{-1} (3x - 4x^3), x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

हल— माना कि $x = \sin \theta \Rightarrow \theta = \sin^{-1} x$

दायाँ पक्ष $= \sin^{-1} (3x - 4x^3)$

$= \sin^{-1} (3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta)$

$= \sin^{-1} (\sin 3\theta) = 3\theta = 3 \sin^{-1} x$

अत: $3 \sin^{-1} x = \sin^{-1} (3x - 4x^3)$ (इतिसिद्धम्)

6. $\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, |x| > 1$

हल— माना कि $y = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)$

माना $x = \sec \theta \Rightarrow \theta = \sec^{-1} x$

तब $y = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\tan^2 \theta}}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{\tan \theta}\right) = \tan^{-1} (\cot \theta)$

$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right] = \frac{\pi}{2} - \theta$

$= \frac{\pi}{2} - \sec^{-1} x$ उत्तर

7. $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$

हल— $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$, $\tan^{-1}$ की मुख्य मान शाखा $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ है

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \tan^{-1}\left(-\tan\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = -\frac{\pi}{4}$$ उत्तर

8) $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ का मान बराबर है—

(A) $\frac{7\pi}{6}$ (B) $\frac{5\pi}{6}$

(C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

उत्तर–(B.)

हल— $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$

$\because$ फलन $\cos^{-1} x$ का मान $[0, \pi]$ में होना चाहिए

यहाँ पर $\frac{7\pi}{6} \notin [0, \pi]$

$\therefore$ $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right) = \cos^{-1}\left(\cos\left(2\pi-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

$\Rightarrow$ $\cos^{-1}\left(\cos\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6} \in [0, \pi]$

अतः सही विकल्प (B) है।

9) $\sin(\tan^{-1} x), |x| < 1$ बराबर होता है :

(A) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

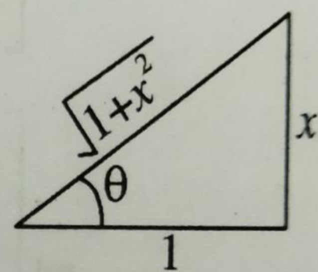
(C) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (D) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

उत्तर— (D)

हल– $\sin(\tan^{-1} x), |x| < 1$

माना $\tan^{-1} x = \theta \therefore x = \tan\theta$

$$\tan\theta = \frac{x}{1}$$



$$\therefore \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \sin(\tan^{-1} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

अतः सही विकल्प (D) है।

---

10) $\sin[\tan^{-1}\alpha + \cot^{-1}\alpha]$ का मान है–

(A) 1 (B) ∞

(C) 0 (D) इनमें से कोई नहीं

उत्तर– (A)

हल– हम जानते हैं $\tan^{-1}\alpha + \cot^{-1}\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

अतः सही विकल्प (A) है।

11. $\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2$ का मान है–

(A) $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ (B) $\tan^{-1} 3$

(C) $+ \tan^{-1} \frac{1}{3}$ (D) $- \tan^{-1} 3$

उत्तर– (D)

हल– $\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\left(\frac{1+2}{1-1.2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{1-2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{-1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}(-3) = -\tan^{-1} 3$$

अतः सही विकल्प (D) है।

12) $\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$ का मान लिखिये।

हल– माना $\sin^{-1}\frac{1}{3} = \theta$

$$\therefore \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta = -\sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$ उत्तर

13) $\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right),\ 0 < x < \pi$

हल— माना कि $$y = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)$$

हम जानते हैं कि $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$

या $1 + \cos 2A = 2\cos^2 A,\ 1 - \cos 2A = 2\sin^2 A$

$A = \frac{x}{2}$ रखने पर

$$1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2},\ 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$\therefore \quad y = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\sqrt{\tan^2\frac{x}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$$

अत: $\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right) = \frac{x}{2},\ x < \pi$ उत्तर

14) $\tan^{-1}\left(\dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right), \dfrac{-\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4}$

हल— माना कि $$y = \tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)$$

अंश व हर को $\cos x$ से भाग देने पर

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{\dfrac{\cos x}{\cos x} - \dfrac{\sin x}{\cos x}}{\dfrac{\cos x}{\cos x} + \dfrac{\sin x}{\cos x}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}\right)$$

अब $$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\tan\dfrac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan\dfrac{\pi}{4}\tan x} = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$$

$\therefore$ $$y = \tan^{-1}\left(\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)$$

$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right) = \dfrac{\pi}{4} - x$ उत्तर

15. यदि $\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1}\frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल— दिया है $\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1}\frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$ .... (1)

$$\text{बायाँ पक्ष} = \tan^{-1}\frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1}\frac{x+1}{x+2}$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}}{1-\frac{x-1}{x-2}\cdot\frac{x+1}{x+2}}\right]$$

$$\left\{\because \tan^{-1}A + \tan^{-1}B = \tan^{-1}\left[\frac{A+B}{1-AB}\right]\right\}$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{(x-1)(x+2)+(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)}}{\frac{(x-2)(x+2)-(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{(x-1)(x+2)+(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)-(x-1)(x+1)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{x^2+x-2+x^2-x-2}{x^2-4-(x^2-1)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2x^2-4}{-3}\right)$$

(1) में यह मान रखने पर

$$\tan^{-1}\left(\frac{2x^2-4}{-3}\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan\frac{\pi}{4} = \frac{2x^2-4}{-3}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2-4}{-3} = 1 \Rightarrow 2x^2-4 = -3$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 1 \qquad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$ उत्तर

16) $\cos^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{12}{13} = \cos^{-1}\frac{33}{65}$

हल— माना कि $\alpha = \cos^{-1}\frac{4}{5} \therefore \cos\alpha = \frac{4}{5}$

$$\therefore \quad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{16}{25}}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\beta = \cos^{-1}\frac{12}{13} \quad \therefore \cos\beta = \frac{12}{13}$$

$$\sin\beta = \sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} - \frac{3}{5} \times \frac{5}{13}$$

$$= \frac{48-15}{65} = \frac{33}{65}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha + \beta = \cos^{-1}\left(\frac{33}{65}\right)$$

$$\Rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{33}{65}\right)$$ **(इतिसिद्धम्)**

17) $\tan^{-1}\frac{63}{16} = \sin^{-1}\frac{5}{13} + \cos^{-1}\frac{3}{5}$

हल— माना कि $\alpha = \sin^{-1}\frac{5}{13} \quad \therefore \sin\alpha = \frac{5}{13}$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\frac{5}{13}}{\sqrt{1-\frac{25}{169}}} = \frac{5}{13} \times \frac{13}{12}$$

$$= \frac{5}{12}$$

और $\beta = \cos^{-1}\frac{3}{5} \quad \therefore \cos\beta = \frac{3}{5},$

$$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta}$$

$$\sin\beta = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{5}{12}+\frac{4}{3}}{1-\frac{5}{12}\times\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{15+48}{36-20} = \frac{63}{16}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = \tan^{-1}\left(\frac{63}{16}\right)$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{63}{16}\right)$$ **(इतिसिद्धम्)**

18) . $\tan^{-1} \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{1}{2} \tan^{-1} x, (x > 0)$

[CBSE 2008]

हल : माना, $x = \tan\theta$

तब $$\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1} x$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}(\tan\theta)$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right) = \frac{1}{2}\theta$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\theta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}\right) = \frac{1}{2}\theta$$

$$\left[\because \tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\theta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}\right]$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right] = \frac{1}{2}\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4}-\theta = \frac{1}{2}\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\theta + \theta$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{3\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = 3\theta$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1} x = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x = \tan\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

1. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 19 & -7 \\ 35 & -2 & \frac{5}{2} & 12 \\ \sqrt{3} & 1 & -5 & 17 \end{bmatrix}$ के लिए ज्ञात कीजिए :

(i) आव्यूह की कोटि (ii) अवयवों की संख्या

(iii) अवयव a_{13}, a_{21}, a_{33}, a_{24}, a_{23}.

हल— (i) आव्यूह की कोटि 3×4

(ii) अवयवों की संख्या $= 3 \times 4 = 12$

(iii) $a_{13} = 19, a_{21} = 35, a_{33} = -5, a_{24} = 12, a_{23} = \frac{5}{2}$.

---

2) समीकरण $\begin{bmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$ से a, b, c तथा d के मान ज्ञात कीजिए।

हल— संगत अवयवों को समान मानते हुए

$$\begin{bmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$$

$$a - b = -1, \quad \text{.... (1)}$$
$$2a - b = 0, \quad \text{.... (2)}$$
$$2a + c = 5, \quad \text{.... (3)}$$
$$3c + d = 13 \quad \text{.... (4)}$$

(2) में से (1) को घटाने पर $a = 1$

(2) से $b = 2$

a का मान (3) में रखने पर

$$2 + c = 5 \therefore c = 3$$

c का मान (4) में रखने पर $3 \times 3 + d = 13$,

$\therefore \quad d = 13 - 9 = 4$

$\Rightarrow \quad a = 1, \quad b = 2,$ **उत्तर**

$c = 3, \quad d = 4.$

3. यदि किसी आव्यूह में 18 अवयव हैं तो इसकी सम्भव कोटियाँ क्या हैं? यदि इसमें 5 अवयव हों तो क्या होगा?

हल— (i) 18 अवयवों वाले आव्यूह की कोटियाँ

$18 \times 1, 2 \times 9, 3 \times 6, 6 \times 3, 9 \times 2, 1 \times 18.$

(ii) 5 अवयवों वाले आव्यूह की कोटियाँ $1 \times 5, 5 \times 1$

4) सिद्ध कीजिये कि

$$\sec\theta\begin{bmatrix}\sec\theta & \tan\theta\\ -\tan\theta & \sec\theta\end{bmatrix} + \tan\theta\begin{bmatrix}-\tan\theta & -\sec\theta\\ \sec\theta & -\tan\theta\end{bmatrix} = I_2$$

हल— प्रश्नानुसार

$$\sec\theta\begin{bmatrix}\sec\theta & \tan\theta\\ -\tan\theta & \sec\theta\end{bmatrix} + \tan\theta\begin{bmatrix}-\tan\theta & -\sec\theta\\ \sec\theta & -\tan\theta\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\sec^2\theta & \sec\theta\tan\theta\\ -\sec\theta\tan\theta & \sec^2\theta\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\tan^2\theta & -\sec\theta\tan\theta\\ \tan\theta\sec\theta & -\tan^2\theta\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\sec^2\theta - \tan^2\theta & \sec\theta\tan\theta - \sec\theta\tan\theta\\ -\sec\theta\tan\theta + \tan\theta\sec\theta & \sec^2\theta - \tan^2\theta\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad \because \ \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

$= I_2$ $\because$ यह 2×2 क्रम का इकाई मैट्रिक्स है।

5) यदि $3\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$ है तो x, y, z तथा w के मानों को ज्ञात कीजिए।

हल— प्रश्नानुसार $3\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$

या $\begin{bmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+4 & x+y+6 \\ z+w-1 & 2w+3 \end{bmatrix}$

$3x = x + 4$ या $2x = 4$ $\therefore x = 2$

$3y = x + y + 6$ या $2y = x + 6 = 2 + 6 = 8$

$\therefore$ $y = 4$ (x का मान रखने पर)

$3w = 2w + 3$ या $w = 3$

$3z = z + w - 1$

या $2z = w - 1 = 3 - 1 = 2$ (w का मान रखने पर)

$\therefore$ $z = 1$

अतः $x = 2, y = 4, z = 1, w = 3$. उत्तर

---

6) यदि $n = p$, तो आव्यूह $7X - 5Z$ की कोटि है—

(A) $p \times 2$ (B) $2 \times n$

(C) $n \times 3$ (D) $p \times n$.

उत्तर—(B)

हल— X की कोटि $= 2 \times n$

Z की कोटि $= 2 \times p$

$\because$ $p = n$

अतः $7X - 5Z$ की कोटि $2 \times n$ है।

अतः सही विकल्प (B) है।

7) यदि $A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ हैं तो $(A + 2B)'$ ज्ञात कीजिए।

हल—

$$A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ तथा}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A + 2B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-2 & 1+0 \\ 3+2 & 2+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A + 2B)' = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \text{ उत्तर}$$

8) यदि A तथा B समान कोटि के सममित आव्यूह हैं तो AB – BA एक

(A) विषम सममित आव्यूह है (B) सममित आव्यूह है

(C) शून्य आव्यूह है (D) तत्समक आव्यूह है

उत्तर— (A)

हल— $\because$ A तथा B समान कोटि के सममित आव्यूह हैं

$$\therefore \quad A' = A$$

$$B' = B$$

तब

$$(AB - BA)' = (AB)' - (BA)'$$

$$= B'A' - A'B'$$

$$= BA - AB$$

$$= -(AB - BA)$$

$\therefore$ AB – BA एक विषम सममित आव्यूह है।

अतः सही विकल्प (A) है।

9). $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

हल : माना $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

प्रारम्भिक संक्रिया के लिए,

$$A = IA$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$R_1 \rightarrow R_1 - R_2$ द्वारा

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$R_2 \rightarrow R_2 - R_1$ द्वारा

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} A$$

अत: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ $[\because I = A^{-1}A]$

10) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

हल : माना $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

प्रारम्भिक संक्रिया के लिए,

$$A = IA$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$R_1 \rightarrow 2R_1 - R_2$ द्वारा

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$R_2 \rightarrow R_2 - 5R_1$ द्वारा

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -10 & 6 \end{bmatrix} A$$

$R_2 \rightarrow \frac{1}{2} R_2$ द्वारा

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ $[\because I = A^{-1}A]$

प्रश्न 11. $\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

हल : माना $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

प्रारम्भिक संक्रिया के लिए,

$$A = IA$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$R_1 \to R_1 - R_2$ द्वारा

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$R_2 \to R_2 - R_1$ द्वारा

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} A$$

$R_1 \to R_1 + 2R_2$ द्वारा

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} A$$

$R_2 \to \frac{1}{2} R_2$ द्वारा

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad [\because I = A^{-1}A]$$

प्रश्न 12. $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

हल : माना $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

प्रारंभिक संक्रिया के लिए,

$$A = IA$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$R_2 \to R_1 + 3R_2$ द्वारा

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} A$$

द्वितीय पंक्ति के सभी अवयव शून्य हैं।

अतः A^{-1} का अस्तित्व नहीं है,

अर्थात् A के व्युत्क्रम का अस्तित्व नहीं है।

13) यदि A तथा B सममित आव्यूह हैं तो सिद्ध कीजिए कि AB – BA एक विषम सममित आव्यूह है।

हल— A और B सममित आव्यूह हैं

$$\therefore \quad A' = A \text{ तथा } B' = B$$

$$(AB - BA)' = (AB)' - (BA)' \quad [\because (A \pm B)' = A' \pm B']$$

$$= B'A' - A'B' \quad [\because (AB)' = B'A']$$

$$= BA - AB \quad [B' = B, A' = A]$$

$$= -(AB - BA)$$

$\Rightarrow$ AB – BA एक विषम सममित आव्यूह है। (**इतिसिद्धम्**)

14) x के किस मान के लिए $[1 \quad 2 \quad 1]\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 2\\ x\end{bmatrix} =$ O है?

हल— $$[1 \quad 2 \quad 1]\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 2\\ x\end{bmatrix} = O$$

या $$[1 \quad 2 \quad 1]\begin{bmatrix}0+4+0\\ 0+0+x\\ 0+0+2x\end{bmatrix} = O$$

या $$[1 \quad 2 \quad 1]\begin{bmatrix}4\\ x\\ 2x\end{bmatrix} = O$$

या $$[4 + 2x + 2x] = O = [0]$$

या $$4x + 4 = 0$$

या $$x = -1$$ उत्तर

15. यदि $2A + B = \begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix}-1 & -5\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ तो A ज्ञात कीजिए।

हल– दिया गया है–

$$2A + B = \begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

B का मान रखने पर

$$2A + \begin{bmatrix}-1 & -5\\ 0 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 2A = \begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1 & -5\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 2A = \begin{bmatrix}3+1 & -1+5\\ 2-0 & 4-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 4\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & 4\\ 2 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$ उत्तर

16. यदि $A = [1\ 2\ 3]$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, तो $(AB)'$ ज्ञात कीजिए।

हल– $AB = [1\ \ 2\ \ 3]_{1\times3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times1}$

$\Rightarrow \quad AB = [1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3]_{1\times1} = [14]_{1\times1}$

$\therefore \quad (AB)' = [14]_{1\times1}$ उत्तर

---

17) यदि $A = \begin{bmatrix} \sin^2\theta & \sec^2\theta \\ \operatorname{cosec}^2\theta & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ तथा

$B = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & -\tan^2\theta \\ -\cot^2\theta & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ हो, तो $A + B$ का मान होगा–

(A) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

उत्तर– (D)

हल– $A + B = \begin{bmatrix} \sin^2\theta & \sec^2\theta \\ \operatorname{cosec}^2\theta & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos^2\theta & -\tan^2\theta \\ -\cot^2\theta & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$A + B = \begin{bmatrix} \sin^2\theta + \cos^2\theta & \sec^2\theta - \tan^2\theta \\ \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

अतः सही विकल्प (D) है।

18) यदि $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix}$ इस प्रकार है कि $A^2 = I$, तो

(A) $1 + \alpha^2 + \beta\gamma = 0$ (B) $1 - \alpha^2 + \beta\gamma = 0$

(C) $1 - \alpha^2 - \beta\gamma = 0$ (D) $1 + \alpha^2 - \beta\gamma = 0$

उत्तर— (C)

हल—

$$A^2 = I$$

$$A.A = I$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \alpha\beta - \alpha\beta \\ \alpha\gamma - \alpha\gamma & \beta\gamma + \alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & 0 \\ 0 & \alpha^2 + \beta\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta\gamma = 1 \Rightarrow 1 - \alpha^2 - \beta\gamma = 0$$

अतः सही विकल्प (C) है।

---

19) यदि $[x \quad -5 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ है तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल— $$[x \quad -5 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$[x \quad -5 \quad -1] \begin{bmatrix} x + 0 + 2 \\ 0 + 8 + 1 \\ 2x + 0 + 3 \end{bmatrix} = 0$$

या $$[x \quad -5 \quad -1] \begin{bmatrix} x + 2 \\ 9 \\ 2x + 3 \end{bmatrix} = 0$$

या $[x(x + 2) - 45 - (2x + 3)] = 0$

$(x^2 + 2x) - 45 - (2x + 3) = 0$

या $[x^2 - 48] = 0$

या $x^2 = 48 \Rightarrow x = \pm\sqrt{48}$

$\therefore$ $x = \pm 4\sqrt{3}$ उत्तर

20) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$, $A + A'$ ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है $$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

तब $$A' = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A + A' = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+1 & 5+6 \\ 6+5 & 7+7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$$ उत्तर

21) निम्नलिखित समीकरणों से x, y तथा z के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & z \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} x+y+z \\ x+z \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

हल— (i) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & z \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

हम जानते हैं कि समान आव्यूहों के संगत अवयव समान होते हैं। अत:

$$4 = y, \qquad 3 = z, \qquad x = 1$$

$$\Rightarrow \quad x = 1, \qquad y = 4, \qquad z = 3$$ **उत्तर**

(ii) $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

संगत अवयव समान रखने पर

$$x + y = 6, \qquad 5 + z = 5, \qquad xy = 8$$

$$\Rightarrow \quad z = 0$$

$y = 6 - x$ को $xy = 8$ में रखने पर

$$x\,(6 - x) = 8 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 4)\,(x - 2) = 0$$

$$\therefore \quad x = 4, 2$$

$$\Rightarrow \quad x = 2, 4, \qquad y = 4, 2, \qquad z = 0$$ **उत्तर**

(iii) $\begin{bmatrix} x+y+z \\ x+z \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

संगत अवयव समान रखने पर

$$x + y + z = 9 \qquad \ldots (1)$$

$$x + z = 5 \qquad \ldots (2)$$

$$y + z = 7 \qquad \ldots (3)$$

(1) में से (2) को घटाने पर

$$y = 9 - 5 = 4$$

(1) में से (3) को घटाने पर

$$x = 9 - 7 = 2$$

अब (2) से $2 + z = 5 \; \therefore \; z = 3$

अत: $x = 2$, $y = 4$, $z = 3$. **उत्तर**

22) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ है तो दर्शाइये कि

$A^3 - 23A - 40\,I = O$ (NCERT)

हल— हम जानते हैं कि

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+6+12 & 2-4+6 & 3+2+3 \\ 3-6+4 & 6+4+2 & 9-2+1 \\ 4+6+4 & 8-4+2 & 12+2+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 4 & 8 \\ 1 & 12 & 8 \\ 14 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

एवं $$A^3 = A.A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 & 4 & 8 \\ 1 & 12 & 8 \\ 14 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 19+2+42 & 4+24+18 & 8+16+45 \\ 57-2+14 & 12-24+6 & 24-16+15 \\ 76+2+14 & 16+24+6 & 32+16+15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix}$$

अब $$A^3 - 23A - 40\,I = \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix} - 23\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 40\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 - 23A - 40\,I = \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -23 & -46 & -69 \\ -69 & 46 & -23 \\ -92 & -46 & -23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -40 & 0 & 0 \\ 0 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & -40 \end{bmatrix}$$

अब $A^3 - 23A - 40\,I$

$$= \begin{bmatrix} 63-23-40 & 46-46+0 & 69-69+0 \\ 69-69+0 & -6+46-40 & 23-23+0 \\ 92-92+0 & 46-46+0 & 63-23-40 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

23) निदर्शित गुणनफल परिकलित कीजिए :

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [2\ 3\ 4]$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

हल— (i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a \times a + b \times b & a \times (-b) + b \times a \\ -b \times a + a \times b & -b \times (-b) + a \times a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & -ab + ab \\ -ab + ab & b^2 + a^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$$ **उत्तर**

(ii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [2\ 3\ 4] = \begin{bmatrix} 1 \times 2 & 1 \times 3 & 1 \times 4 \\ 2 \times 2 & 2 \times 3 & 2 \times 4 \\ 3 \times 2 & 3 \times 3 & 3 \times 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$ **उत्तर**

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 1 + (-2) \times 2 & 1 \times 2 + (-2) \times 3 & 1 \times 3 + (-2) \times 1 \\ 2 \times 1 + 3 \times 2 & 2 \times 2 + 3 \times 3 & 2 \times 3 + 3 \times 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - 4 & 2 - 6 & 3 - 2 \\ 2 + 6 & 4 + 9 & 6 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 8 & 13 & 9 \end{bmatrix}$$ **उत्तर**

24) दर्शाइए कि

(i) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

हल— (i) सिद्ध करना है

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

बायाँ पक्ष $= \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 5 \times 2 + (-1) \times 3 & 5 \times 1 + (-1) \times 4 \\ 6 \times 2 + 7 \times 3 & 6 \times 1 + 7 \times 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 - 3 & 5 - 4 \\ 12 + 21 & 6 + 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 33 & 34 \end{bmatrix} \quad \text{.... (1)}$$

दायाँ पक्ष $= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 5 + 1 \times 6 & 2 \times (-1) + 1 \times 7 \\ 3 \times 5 + 4 \times 6 & 3 \times (-1) + 4 \times 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 + 6 & -2 + 7 \\ 15 + 24 & -3 + 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 5 \\ 39 & 25 \end{bmatrix} \quad \text{.... (2)}$$

(1) व (2) से

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{उत्तर}$$

(ii) सिद्ध करना है

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

बायाँ पक्ष $= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times (-1) + 2 \times 0 + 3 \times 2 & 1 \times 1 + 2 \times (-1) + 3 \times 3 & 1 \times 0 + 2 \times 1 + 3 \times 4 \\ 0 + 0 + 0 & 0 + 1 \times (-1) + 0 & 0 + 1 \times 1 + 0 \\ 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 0 \times 2 & 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 0 & 1 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 + 0 + 6 & 1 - 2 + 9 & 0 + 2 + 12 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 8 & 14 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{.... (1)}$$

दायाँ पक्ष $= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1\times1+1\times0+0\times1 & -1\times2+1\times1+0\times1 & -1\times3+1\times0+1\times0 \\ 0\times1+(-1)\times0+1\times1 & 0\times2+(-1)\times1+1\times1 & 0\times3+(-1)\times0+1\times0 \\ 2\times1+3\times0+4\times1 & 2\times2+3\times1+4\times1 & 2\times3+3\times0+4\times0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -2+1+0 & -3 \\ 1 & -1+1 & 0 \\ 2+4 & 4+3+4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 11 & 6 \end{bmatrix} \quad ....(2)$$

(1) व (2) से

बायाँ पक्ष $\neq$ दायाँ पक्ष

अतः

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ उत्तर

25) A तथा B आव्यूहों के लिए सत्यापित कीजिए कि $(AB)' = B'A'$ जहाँ

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B = [-1, 2, 1]$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = [1, 5, 7]$

हल— (i) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B = [-1 \ \ 2 \ \ 1]$

$$\therefore \quad AB = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} [-1 \quad 2 \quad 1]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times (-1) & 1 \times 2 & 1 \times 1 \\ -4 \times (-1) & -4 \times 2 & -4 \times 1 \\ 3 \times (-1) & 3 \times 2 & 3 \times 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -8 & -4 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{बायाँ पक्ष} = (AB)' = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -8 & -4 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}'$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 2 & -8 & 6 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \qquad \ldots (1)$$

$$\text{दायाँ पक्ष} = B'A' = [-1 \ \ 2 \ \ 1]' \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ \ -4 \ \ 3]$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \times 1 & -1 \times (-4) & -1 \times 3 \\ 2 \times 1 & 2 \times (-4) & 2 \times 3 \\ 1 \times 1 & 1 \times (-4) & 1 \times 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 2 & -8 & 6 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \qquad \ldots (2)$$

(1) और (2) से बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

अतः $(AB)' = B'A'$ (इतिसिद्धम्)

(ii) $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = [1 \quad 5 \quad 7]$

$$\Rightarrow \quad A' = [0 \quad 1 \quad 2], \ B' = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} [1 \quad 5 \quad 7]$$

$$= \begin{bmatrix} 0\times1 & 0\times5 & 0\times7 \\ 1\times1 & 1\times5 & 1\times7 \\ 2\times1 & 2\times5 & 2\times7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 10 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\text{बायाँ पक्ष} = (AB)' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 10 & 14 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 7 & 14 \end{bmatrix} \quad \text{.... (1)}$$

$$\text{दायाँ पक्ष} = B'A' = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} [0 \quad 1 \quad 2]$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times0 & 1\times1 & 1\times2 \\ 5\times0 & 5\times1 & 5\times2 \\ 7\times0 & 7\times1 & 7\times2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 7 & 14 \end{bmatrix} \quad \text{.... (2)}$$

(1) व (2) से

अतः $(AB)' = B'A'$ (इतिसिद्धम्)

1) यदि सारणिक $\begin{vmatrix} K & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$ हो, तो K का मान ज्ञात कीजिये।

हल– दिया है

$$\begin{vmatrix} K & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$\Rightarrow \quad 4K - 16 = 4$$

$$\Rightarrow \quad 4K = 4 + 16 = 20$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{20}{4} = 5$$ उत्तर

2) यदि $\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 8 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$ तो x का मान ज्ञात

$$\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 8 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$2x^2 - 40 = 18 + 14$$

$$2x^2 = 72$$

$$x = \pm 6$$ उत्तर

3. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, तो दिखाइए $|2A| = 4\ |A|$

हल— $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \therefore\ 2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 2 \times 4 = 2 - 8$$

$$= -6 \quad .... (1)$$

$$|2A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 4 \times 8 = 8 - 32$$

$$= -24 \quad .... (2)$$

(1) और (2) से

$\therefore$ $|2A| = 4\ (-6) = 4\ |A|$ उत्तर

4. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो दिखाइए $|3A| = 27\ |A|$

हल— $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad 3A = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad |3A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}$$

प्रत्येक पंक्ति से 3 निकालने पर

$$|3A| = 3 \times 3 \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 27\ |A|$$

$\Rightarrow$ $|3A| = 27\ |A|$ उत्तर

5) $$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 65 \\ 3 & 8 & 75 \\ 5 & 9 & 86 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 65 \end{vmatrix}$$

7) दूसरी पंक्ति के अवयवों के सहखण्डों का प्रयोग करके $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

दिए गए प्रत्येक आव्यूहों के व्युत्क्रम (जिनका अस्तित्व हो) ज्ञात कीजिए :

9) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

हल— माना कि $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 3,$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -4$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -(-2) = 2,$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 2$$

$$\therefore \quad \text{adj } A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 8 = 14 \neq 0$$

$\therefore$ A^{-1} का अस्तित्व होगा।

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ adj } A = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$ उत्तर

10) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

हल— माना कि $A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 2,$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -(-3) = 3$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -5,$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = -1$$

$$\therefore \quad \text{adj } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = -2 + 15 = 13 \neq 0$$

$\therefore$ A^{-1} का अस्तित्व होगा।

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ adj } A = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$ उत्तर

11) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ के लिए a और b ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए ताकि $A^2 + aA + bI = O$ हो।

हल—
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9+2 & 6+2 \\ 3+1 & 2+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^2 + aA + bI = \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3a & 2a \\ a & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11+3a+b & 8+2a \\ 4+a+0 & 3+a+b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11+3a+b & 8+2a \\ 4+a & 3+a+b \end{bmatrix}$$

अब $A^2 + aA + bI = O$

$$\therefore \begin{bmatrix} 11+3a+b & 8+2a \\ 4+a & 3+a+b \end{bmatrix} = O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

संगत अवयवों को बराबर रखने पर

$$11 + 3a + b = 0 \;; \quad 8 + 2a = 0;$$
$$4 + a = 0 \;; \quad 3 + a + b = 0$$

तब $a = -4,\ b = 1$ उत्तर

12) सिद्ध कीजिए कि सारणिक

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+bx & c+dx & p+qx \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

(NCERT)

हल– सारणिक Δ पर $R_1 \to R_1 - xR_2$ का प्रयोग करने पर हमें

$$\Delta = \begin{vmatrix} a(1-x^2) & c(1-x^2) & p(1-x^2) \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$ प्राप्त होता है।

प्रथम पंक्ति में से उभयनिष्ठ भाग $(1-x^2)$ को बाहर निकालने पर

$$\Delta = (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - xR_1$, का प्रयोग करने पर हमें सारणिक

$$\Delta = (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$ प्राप्त होता है।

13) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल— माना $$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

संक्रिया $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ करने पर

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2(x+y) & y & x+y \\ 2(x+y) & x+y & x \\ 2(x+y) & x & y \end{vmatrix}$$

$2\ (x+y)$ को C_1 से उभयनिष्ठ लेने पर

$$\Delta = 2\ (x+y) \begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 1 & x+y & x \\ 1 & x & y \end{vmatrix}$$

संक्रिया $R_2 \to R_2 - R_1$ तथा $R_3 \to R_3 - R_1$ करने पर

$$\Delta = 2\ (x+y) \begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 0 & x & -y \\ 0 & x-y & -x \end{vmatrix}$$

C_1 से प्रसरण करने से

$$= 2\ (x+y) \begin{vmatrix} x & -y \\ x-y & -x \end{vmatrix}$$

$$= 2\ (x+y)\ [-x^2 + xy - y^2]$$
$$= -2\ (x+y)\ [x^2 - xy + y^2]$$
$$= -2\ (x^3 + y^3)$$ उत्तर

14) यदि $\begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$ हो, तो λ का मान लिखिए।

हल— $(\lambda + 1)(1 + 1) - 1(1 - 1) + 1(1 + 1) = 4$

$\Rightarrow \quad 2\lambda + 2 - 0 + 2 = 4$

$\Rightarrow \quad \lambda = 0$

15. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \cos(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \cos(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \cos(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0$

हल— माना $\Delta = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \cos(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \cos(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \cos(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$

$\therefore \quad \Delta = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \cos\alpha\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta \\ \sin\beta & \cos\beta & \cos\beta\cos\delta - \sin\beta\sin\delta \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \cos\gamma\cos\delta - \sin\gamma\sin\delta \end{vmatrix}$

संक्रिया $C_3 \rightarrow C_3 + \sin\delta\, C_1 - \cos\delta\,.\, C_2$ करने पर

$\Delta = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix} = 0$ (**इतिसिद्धम्**)

16) यदि x, y, z विभिन्न हों और

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$$

तो दर्शाइये कि $1 + xyz = 0$ **(NCERT)**

हल– हमें ज्ञात है $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix}$

गुणधर्म 5 का प्रयोग करने पर

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{vmatrix}$$

$C_3 \leftrightarrow C_2$ और तब $C_1 \leftrightarrow C_2$ के प्रयोग से

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} + xyz \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} (1 + xyz)$$

संक्रिया $R_2 \to R_2 - R_1$ और $R_3 \to R_3 - R_1$ का प्रयोग करने पर

$$= (1 + xyz) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix}$$

R_2 में से $(y - x)$ और R_3 से $(z - x)$ उभयनिष्ठ लेने पर

$$\Delta = (1 + xyz)(y - x)(z - x) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & y+x \\ 0 & 1 & z+x \end{vmatrix}$$

C_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर

$$= (1 + xyz)(y - x)(z - x)(z - y)$$

चूँकि $\Delta = 0$ और x, y और z सभी भिन्न हैं।

अतः $x - y \neq 0$, $y - z \neq 0$, $z - x \neq 0$, से हमें प्राप्त होता है $1 + xyz = 0$

17) $$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2$$

हल— माना $$\Delta = \begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix}$$

अब R_1, R_2 तथा R_3 में a, b तथा c से गुणा करने पर

$$= \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} a(a^2+1) & a^2b & a^2c \\ ab^2 & b(b^2+1) & b^2c \\ c^2a & c^2b & c(c^2+1) \end{vmatrix}$$

अब a, b, c क्रमशः C_1, C_2 व C_3 से बाहर लेने पर

$$= \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} a^2+1 & a^2 & a^2 \\ b^2 & b^2+1 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2+1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2+1 & a^2 & a^2 \\ b^2 & b^2+1 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2+1 \end{vmatrix}$$

अब संक्रिया $R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ करने पर

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+a^2+b^2+c^2 & 1+a^2+b^2+c^2 & 1+a^2+b^2+c^2 \\ b^2 & 1+b^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & 1+c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (1 + a^2 + b^2 + c^2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b^2 & 1+b^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & 1+c^2 \end{vmatrix}$$

अब संक्रिया $C_2 \to C_2 - C_1$ तथा $C_3 \to C_3 - C_1$ करने पर

$$\Delta = (1 + a^2 + b^2 + c^2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b^2 & 1 & 0 \\ c^2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1 + a^2 + b^2 + c^2)\ (1)$$

$$= 1 + a^2 + b^2 + c^2$$ **(इतिसिद्धम्)**

18) प्रदर्शित कीजिये कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ समीकरण $A^2 - 4A + I = O$, जहाँ $I_{2\times2}$ कोटि का एक तत्समक आव्यूह है और O, 2 × 2 कोटि का एक शून्य आव्यूह है। इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिये। **(NCERT)**

हल– हम जानते हैं कि $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

अतः $A^2 - 4A + I = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= O$$

अब $A^2 - 4A + I = O$

इसलिए $AA - 4A = -I$

या $AA(A^{-1}) - 4AA^{-1} = -IA^{-1}$

(यहाँ पर दोनों ओर A^{-1} से उत्तर गुणन द्वारा किया गया है)

$\because (|A| \neq 0)$

या $A(AA^{-1}) - 4I = -A^{-1}$

या $AI - 4I = -A^{-1}$

या $A^{-1} = 4I - A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

अतः $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ उत्तर

19) सिद्ध कीजिये कि

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & c & c \\ a & b+c+2a & a \\ b & b & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3.$$

हल– माना $\Delta = \begin{vmatrix} a+b+2c & c & c \\ a & b+c+2a & a \\ b & b & c+a+2b \end{vmatrix}$

संक्रिया $R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ करने से

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & 2(a+b+c) & 2(a+b+c) \\ a & b+c+2a & a \\ b & b & c+a+2b \end{vmatrix}$$

R_1 में से $2(a+b+c)$ उभयनिष्ठ लेने पर

$$\Delta = 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b+c+2a & a \\ b & b & c+a+2b \end{vmatrix}$$

संक्रिया $C_2 \to C_2 - C_1$ तथा $C_3 \to C_3 - C_1$ करने से

$$\Delta = 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b+c+a & 0 \\ b & 0 & c+a+b \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta = 2(a+b+c) \begin{vmatrix} b+c+a & 0 \\ 0 & c+a+b \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 2(a+b+c)\left((a+b+c)^2 - 0\right)$$

$$= 2(a+b+c)^3$$ (इतिसिद्धम्)

1) सिद्ध कीजिये कि $f(x) = \tan x$ एक संतत फलन है। **(NCERT)**

हल– दिया हुआ फलन $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ है। यह फलन उन सभी वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित है, जहाँ $\cos x \neq 0$, अर्थात् $x \neq (2n + 1)\dfrac{\pi}{2}$ है। हमने उपरोक्त उदाहरण में यह प्रमाणित किया है कि sine और cosine फलन, संतत फलन हैं। इसलिए tan फलन, इन दोनों फलनों का भागफल होने के कारण x के उन सभी मानों के लिए संतत है जिनके लिए यह परिभाषित है।

2) यदि दिया गया फलन

$$f(x) = \begin{cases} K(x^2 - 2x), \text{ यदि } x < 0 \\ \cos x, \text{ यदि } x \geq 0 \end{cases}$$

$x = 0$ पर संतत हो तो K का मान ज्ञात कीजिये।

हल– दायीं सीमा (R.H.L.) का मान निकालने पर

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0 + h) = \lim_{h \to 0} \cos(0 + h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos h = 1$$

बायीं सीमा (L.H.L.) का मान निकालने पर

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0 - h)$$

$$= \lim_{h \to 0} K\left[(0 - h)^2 - 2(0 - h)\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} K[h^2 + 2h] = K[0]$$

$$= 0$$

यहाँ पर R.H.L.≠L.H.L.

अतः यहाँ से स्पष्ट है कि K का कोई ऐसा मान सम्भव नहीं है जो $x = 0$ पर फलन को संतत बनाये। **उत्तर**

3) दर्शाइये कि प्रत्येक बहुपद फलन संतत होता है। **(NCERT)**

हल– कोई फलन p, एक बहुपद फलन होता है यदि वह किसी प्राकृत संख्या n के लिए $p(x) = a_0 + a_1x \dots + a_nx^n$ द्वारा परिभाषित हो, जहाँ $a_i \in R$ तथा $a_n \neq 0$ है। स्पष्टतया यह फलन प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए परिभाषित है। किसी निश्चित वास्तविक संख्या c के लिए

$$\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$$

इसलिए परिभाषा द्वारा c पर p संतत है। चूँकि c कोई भी वास्तविक संख्या है इसलिए p किसी भी वास्तविक संख्या के लिए संतत है अर्थात् p एक संतत फलन है।

4) दर्शाइए कि $f(x) = \cos(x^2)$ द्वारा परिभाषित फलन एक संतत फलन है।

हल— $$f(x) = \cos x^2$$

माना $f(x) = x^2$ एवं $g(x) = \cos x$

तब $(gof)(x) = g[f(x)] = g(x^2) = \cos x^2$

चूँकि $f(x)$ एवं $g(x)$ संतत फलन हैं, अतः उनका संयुक्त फलन (gof) भी संतत होगा।

अतः $\cos x^2$ संतत फलन है।

5) जाँचिए कि क्या $\sin |x|$ एक संतत फलन है?

हल— माना $f(x) = |x|$ और $g(x) = \sin x$

$\Rightarrow \quad (gof)(x) = g[f(x)] = g(|x|) = \sin |x|$

चूँकि f एवं g संतत फलन हैं, अतः इनका संयुक्त फलन (gof) भी संतत होगा।

6. यदि $x - y = \pi$ तो $\frac{dy}{dx}$ सिद्ध कीजिये।

(NCERT)

हल– $\because \quad x - y = \pi$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}(x - y) = \frac{d}{dx}(\pi)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dx} - \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{dy}{dx} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 1$$ उत्तर

7. $\sin^2 y + \cos xy = k$

हल— प्रश्नानुसार $\sin^2 y + \cos xy = k$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

या $2 \sin y \cos y \frac{dy}{dx} - \sin xy \cdot \left[1.y + x\frac{dy}{dx}\right] = 0$

या $-y \sin xy + (2 \sin y \cos y - x \sin xy)\frac{dy}{dx} = 0$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y \sin xy}{2 \sin y \cos y - x \sin xy}$$

$$= \frac{y \sin xy}{\sin 2y - x \sin xy}$$ उत्तर

8. $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$

हल— प्रश्नानुसार $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2 \sin x \frac{d}{dx} (\sin x) + 2 \cos y \frac{d}{dx} (\cos y) = 0$$

या $$2 \sin x \cos x + 2 \cos y (- \sin y) \frac{dy}{dx} = 0$$

या $$2 \sin x \cos x - 2 \cos y \sin y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2\sin x \cos x}{2\sin y \cos y} = \frac{\sin 2x}{\sin 2y}$$ उत्तर

निम्नलिखित का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए :

9) $\dfrac{e^x}{\sin x}$

हल— प्रश्नानुसार $y = \dfrac{e^x}{\sin x} = \dfrac{u}{v}$

माना कि $$\frac{dy}{dx} = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}, x \neq n\pi, n \in Z$$ उत्तर

10. $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$, $y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$

हल— प्रश्नानुसार $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta), y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$

$\because \quad x = a\ (\cos\theta + \theta\sin\theta)$

θ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dx}{d\theta} = a\ [-\sin\theta + 1\ .\ \sin\theta + \theta\cos\theta]$$

$$= a\ \theta\cos\theta$$

$\because \quad y = a\ (\sin\theta - \theta\cos\theta)$

θ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{d\theta} = a\ [\cos\theta - \{1\ .\ \cos\theta + \theta\ (-\sin\theta)\}]$$

$$= a\ \theta\sin\theta$$

$$\because \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \div \frac{dx}{d\theta} = \frac{a\theta\sin\theta}{a\theta\cos\theta} = \tan\theta \text{ उत्तर}$$

---

11. यदि $y = 5\cos x - 3\sin x$ है तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

हल— प्रश्नानुसार $y = 5\cos x - 3\sin x$

अवकलन करने पर

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -5\sin x - 3\cos x$$

पुनः अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -5\cos x + 3\sin x$$

$$= -(5\cos x - 3\sin x)$$

$$= -y$$

या $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ (**इतिसिद्धम्**)

---

12. लाग्रांज माध्यमान प्रमेय $f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)$, जहाँ $\theta \in (0, 1)$ में निम्नलिखित फलन के लिए θ का मान ज्ञात कीजिये–

$$f(x) = x^2$$

हल– दिया गया फलन

$$f(x) = x^2$$

$$f(a) = a^2, f(a+h) = (a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$$

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(a+\theta h) = 2(a+\theta h)$$

$$f'(a+\theta h) = 2a + 2\theta h$$

इसलिए $f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h)$

अतः $a^2 + 2ah + h^2 - a^2 = h(2a + 2\theta h)$

$\Rightarrow \quad h(2a+h) = h(2a+2\theta h)$

$\Rightarrow \quad 2a + h = 2a + 2\theta h$

$\Rightarrow \quad 2\theta = 1$

$\therefore \quad \theta = \dfrac{1}{2}$ **उत्तर**

---

13) यदि $-1 < x < 1$ के लिए $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$

हल— प्रश्नानुसार $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$

$\therefore x\sqrt{1+y} = -y\sqrt{1+x}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$x^2(1+y) = y^2(1+x) \Rightarrow x^2 - y^2 - y^2x + x^2y = 0$$

$\Rightarrow (x+y)(x-y) + xy(x-y) = 0$

$x \neq y$, $x - y$ से भाग देने पर

$\Rightarrow \quad x + y + xy = 0$

$x + (1+x)y = 0$

$\therefore \quad y = -\dfrac{x}{1+x}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1.(1+x) - x.1}{(1+x)^2} = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ **(इतिसिद्धम्)**

---

14. $y = x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \ldots\ldots\infty}}}$ का x के सापेक्ष अवकलन करें।

हल– $y = x + \frac{1}{y}$ लिखने पर

$\Rightarrow \quad y^2 = xy + 1$

$\Rightarrow \quad y^2 - xy = 1$

अब x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(xy) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$\Rightarrow \quad 2y\frac{dy}{dx} - \left[x \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot 1\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2y\frac{dy}{dx} - \frac{x\,dy}{dx} - y = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}(2y - x) = y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2y - x}$$ उत्तर

15. **फलन $f(x) = \sin 2x$ के लिए रोल प्रमेय अन्तराल $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में सत्य है, तो c का मान लिखिये।**

हल– दिया गया फलन $f(x) = \sin 2x$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(\sin 2x) = 2\cos 2x$$

$$\therefore \quad f'(c) = 2\cos 2c = 0$$

$$\cos 2c = \frac{0}{2} = 0 = \cos\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2c = \frac{\pi}{2} \quad \therefore c = \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

इसलिए $c = \frac{\pi}{4}$ उत्तर

निम्नलिखित फलनों के प्रतिअवकलज (समाकंलन) निरीक्षण विधि द्वारा ज्ञात कीजिए :

1. $\sin 2x$

हल— हम जानते हैं कि

$$\frac{d}{dx}\cos 2x = -2\sin 2x$$

$$\therefore \quad \sin 2x = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\cos 2x = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)$$

$$\therefore \int \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$$ **उत्तर**

2. $\cos 3x$

हल— हम जानते हैं कि $\frac{d}{dx}\sin 3x = 3\cos 3x$

$$\therefore \quad \frac{1}{3}\frac{d}{dx}(\sin 3x) = \cos 3x$$

$$\therefore \quad \int \cos 3x\, dx = \frac{1}{3}\sin 3x + C$$ **उत्तर**

3. e^{2x}

हल— हम जानते हैं कि $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) = e^{2x}$

$$\therefore \quad \int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$ **उत्तर**

4. मान ज्ञात कीजिये—

$$\int \frac{\sec^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$$

हल— माना $$I = \int \frac{\sec^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$$

$\sqrt{x} = t$ लेने पर

$\therefore$ $$\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt$$

या $$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\ dt$$

$\therefore$ $$I = \int \sec^2 t \cdot 2dt = 2\int \sec^2 t\ dt$$

$\Rightarrow$ $$I = 2\tan t + C$$

अतः $$I = 2\tan \sqrt{x} + C$$ उत्तर

5. मान ज्ञात कीजिये—

$$\int \frac{\log x}{x} dx$$

हल— माना $$I = \frac{\log x}{x} dx$$

$\log x = t$ रखने पर

$\therefore$ $$\frac{1}{x} dx = dt$$

इसलिये $$I = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + C$$

$$I = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C$$ उत्तर

निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए–

6. $\int (4e^{3x} + 1)\, dx$

हल— $\int (4e^{3x} + 1)\, dx = 4\int e^{3x}\, dx + \int dx$

$= \frac{4}{3}e^{3x} + x + C$ उत्तर

7. $\int x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$

हल— $\int x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = \int \left(x^2 - x^2 \cdot \frac{1}{x^2}\right) dx = \int (x^2 - 1)\, dx$

$= \frac{x^3}{3} - x + C$ उत्तर

8. $\int (ax^2 + bx + c)\, dx$

हल— $\int (ax^2 + bx + c)\, dx = a\int x^2 dx + b\int x\, dx + c\int dx$

$= a \cdot \frac{x^3}{3} + b \cdot \frac{x^2}{2} + cx + C$

$\left[\because \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} - c\right]$

$= \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx + C$ उत्तर

प्रश्नों में प्रत्येक फलन का समाकलन ज्ञात कीजिए—

9) $\sin^2(2x+5)$

हल— माना $I = \int \sin^2(2x+5)\, dx$

$$\left(\because \sin^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int [1-\cos 2(2x+5)]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int [1-\cos(4x+10)]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \int \cos\ (4x+10)\, dx\right]$$

अब $4x + 10 = t$ रखने पर $4\ dx = dt$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int \cos t\, dt$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\ \sin t + C$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\ \sin\ (4x+10) + C$$ उत्तर

10. $\sin^4 x$

हल—माना $I = \int \sin^4 x \, dx = \int (\sin^2 x)^2 \, dx$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$$

$$\left[\because \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx$$

$$\left[\because \cos^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\int (2 - 4\cos 2x + \cos 4x + 1)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (3 - 4\cos 2x + \cos 4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[3x - 4 . \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{4}\right] + C$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$ उत्तर

11) $\dfrac{1}{\sqrt{7-6x-x^2}}$

13) $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x-2)}$ बराबर है—

(A) $\log\left|\frac{(x-1)^2}{x-2}\right| + C$ (B) $\log\left|\frac{(x-2)^2}{x-1}\right| + C$

(C) $\log\left|\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2\right| + C$ (D) $\log|(x-1)(x-2)| + C$

उत्तर—(B)

हल— $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x-2)}$

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)}$$

$$x = A(x-2) + B(x-1)$$

$x = 2$ रखने पर

$$2 = 0 + B(2-1) \qquad \therefore B = 2$$

$x = 1$ रखने पर

$$1 = A(1-2) + 0 \qquad \therefore A = -1$$

$$\therefore \int \frac{x\ dx}{(x-1)(x-2)} = -\int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2}$$

$$= -\log|x-1| + 2\log|x+2| + C$$

$$= \log\left|\frac{(x-2)^2}{(x-1)}\right| + C$$

अत: सही विकल्प (B) है।

14) मान ज्ञात करो (Evaluate) : $\int x^2 \sin 2x \, dx$

हल—ILATE के अनुसार यहाँ x^2 को प्रथम व $\sin 2x$ को द्वितीय फलन लेकर खण्डशः समाकलन करने पर

$$\int x^2 \sin 2x \, dx$$

$$= x^2 \int \sin 2x \, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(x^2) \int \sin 2x \, dx \right\} dx$$

$$= x^2 \left(\frac{-\cos 2x}{2} \right) - \int \left\{ 2x \left(\frac{-\cos 2x}{2} \right) \right\} dx$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \int x \cos 2x \, dx$$

पुनः दायीं ओर के समाकल (integral) में x को प्रथम व $\cos 2x$ को द्वितीय फलन लेकर खण्डशः समाकलन करने पर

$$\int x^2 \sin 2x \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \left[x . \left(\frac{\sin 2x}{2} \right) - \int 1 . \left(\frac{\sin 2x}{2} \right) dx \right]$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \left(\frac{-\cos 2x}{2} \right) + C$$

उत्तर

15) . मान ज्ञात करो

$$\int_0^3 \frac{dx}{9+x^2}$$

$$I = \int_0^3 \frac{dx}{9+x^2}\,dx$$

$$= \int_0^3 \frac{1}{(3)^2+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^3$$

$$= \frac{1}{3}\left[\tan^{-1}(1) - \tan^{-}(0)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{\pi}{4} - 0\right]$$

$$= \frac{\pi}{12}$$ उत्तर

16) $\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{4+9x^2}$ बराबर है—

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{12}$

(C) $\frac{\pi}{24}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

उत्तर—(C)

हल—

$$\int_0^{2/3} \frac{dx}{4+9x^2} = \frac{1}{9}\int_0^{2/3} \frac{dx}{x^2+\frac{4}{9}} = \frac{1}{9}\int_0^{2/3} \frac{dx}{(x)^2+\left(2/3\right)^2}$$

$$= \frac{1}{9} \times \frac{1}{2/3} \tan^{-1} \frac{x}{2/3} + C$$

$$= \frac{3}{9\times 2}\left[\tan^{-1}\frac{3x}{2}\right]_0^{2/3}$$

$$= \frac{1}{6}[\tan^{-1}1 - \tan^{-1}0]$$

$$= \frac{1}{6} \times \left[\frac{\pi}{4} - 0\right] = \frac{\pi}{24}$$

अतः सही विकल्प (C) है।

17) $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx$ का मान ज्ञात कीजिये।

हल— माना $$I = \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx$$

माना (Put) $1 + x^2 = t$

$\therefore$ $2x\,dx = dt$

सीमायें बदलने पर जब $x = 0$ तब $t = 1 + 0 = 1$

जब $x = 1$ तब $t = 1 + 1^2 = 1 + 1 = 2$

$$\int_1^2 \frac{dt}{t} = [\log t]_1^2$$

$$= \log 2 - \log 1$$

$$= \log 2 - 0 = \log 2$$

समाकलनों का मान प्रतिस्थापन का उपयोग करते हुए ज्ञात कीजिए—

18) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$

हल— प्रश्नानुसार

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx$$

अब $x^2 + 1 = t$ रखने पर $\therefore$ $2x\,dx = dt$

जब $x = 0$ तब $t = 1$

$x = 1$ तब $t = 2$

अतः $$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} [\log t]_1^2$$

$$= \frac{1}{2} (\log 2 - \log 1)$$

$$= \frac{1}{2} \log 2$$ उत्तर

19) यदि $f(x) = \int_0^x t \sin t \, dt$, तब $f'(x)$ है—

(A) $\cos x + x \sin x$ (B) $x \sin x$

(C) $x \cos x$ (D) $\sin x + x \cos x$

उत्तर—(B)

हल— $$f(x) = \int_0^x t \sin t \, dt,$$

$\Rightarrow$ $$f'(x) = x \sin x$$

अतः सही विकल्प (B) है।

20). $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिये।

हल—यहाँ पर $$f(x) = \sin^5 x$$

$\therefore$ $$f(-x) = \sin^5(-x) = (-\sin x)^5$$

$$= -\sin^5(x) = -f(x)$$

$$\boxed{f(-x) = -f(x)}$$

अतः दिया गया फलन विषम फलन है। अतः गुणधर्म P_6 से

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \, dx = 0 \text{ (शून्य)}$$

21) . $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$ का मान ज्ञात कीजिये।

(NCERT)

हल— माना $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}} dx$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}} dx \quad ....(1)$$

तब $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-x\right)}}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-x\right)}+\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-x\right)}} dx$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx \quad ....(2)$$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर हम पाते हैं कि

$$2I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} dx = [x]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

$I = \frac{\pi}{12}$ **उत्तर**

---

22) . $\int \cos 6x \sqrt{1+\sin 6x}\, dx$ ज्ञात कीजिए।

हल— $t = 1 + \sin 6x$, रखने पर $dt = 6 \cos 6x\, dx \Rightarrow \cos 6x\, dx = \frac{1}{6} dt$

इसलिए

$$\int \cos 6x \sqrt{1+\sin 6x}\, dx = \int \frac{1}{6} t^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} (t)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{9} (1+\sin 6x)^{\frac{3}{2}} + C$$ **उत्तर**

---

23) हल करें $\int \frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$

हल—माना $I = \int \frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$

$$= \int \frac{\sec^4 x}{1+\tan^4 x} dx = \int \frac{\sec^2 x \cdot \sec^2 x}{1+(\tan^2 x)^2} dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x\,(1+\tan^2 x)}{1+(\tan^2 x)^2} dx$$

$\tan x = t$ रखने पर $\sec^2 x\, dx = dt$

$$\therefore \quad I = \int \frac{1+t^2}{1+t^4} dt$$

$$= \int \frac{1+1/t^2}{t^2+1/t^2} dt$$

$$= \int \frac{1+1/t^2}{t^2+1/t^2-2+2} dt$$

$$= \int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} dt$$

पुनः $t-\frac{1}{t} = 4$ रखने पर $\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt = du$

तब $I = \int \frac{du}{(u)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)+C$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{2}}\right)+C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{t^2-1}{\sqrt{2}t}\right)+C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan^2 x-1}{\sqrt{2}\tan x}\right)+C$$ उत्तर

निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए

24) $$\int_1^3 \frac{dx}{x^2(x+1)} = \frac{2}{3} + \log\frac{2}{3}$$

हल— माना कि $$I = \int_1^3 \frac{dx}{x^2(x+1)}$$

यहाँ $$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

$\therefore$ $1 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$

$x = 0$ रखने पर $1 = B \,.\, 1 \therefore B = 1$

$x = -1$ रखने पर $1 = C \,.\, (-1)^2 \therefore C = 1$

x^2 के गुणांकों की तुलना करने पर

$$0 = A + C \therefore A = -C = -1$$

$$\therefore \frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$$

$$\therefore \quad I = \int_1^3 \frac{1}{x^3(x+1)}\,dx$$

$$= \int_1^3 -\frac{1}{x}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= -(\log|x|)_1^3 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 + [\log|x+1|]_1^3$$

$$= (-\log 3 + \log 1) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{1}\right) + \log 4 - \log 2$$

$$= -\log 3 + \frac{2}{3} + 2\log 2 - \log 2$$

$$= \log 2 - \log 3 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \log\frac{2}{3}$$

(इतिसिद्धम्)

1. दिखाइए कि फलन $y = A\cos x - B\sin x$, अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ का हल है। [CBSE 2005 C, 06]

हल : दिया गया फलन

$$y = A\cos x - B\sin x \quad \ldots(1)$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = -A\sin x - B\cos x \quad \ldots(2)$$

पुनः समीकरण (2) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -A\cos x - B(-\sin x)$$

$$= -A\cos x + B\sin x$$

$$= -(A\cos x - B\sin x)$$

$$= -y \quad \text{[समीकरण (1) से]}$$

या $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

अतः $y = A\cos x - B\sin x$ अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ का हल है। **उत्तर**

2) दिखाइए कि फलन $y = e^{\tan^{-1}x}$ अवकल समीकरण $(1+x^2)\frac{dy}{dx} = y$ का हल है।

हल : दिया गया फलन

$$y = e^{\tan^{-1}x} \quad \ldots(1)$$

समीकरण (1) के दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = e^{\tan^{-1}x} \times \frac{1}{(1+x^2)}$$

या $(1+x^2)\frac{dy}{dx} = e^{\tan^{-1}x} = y$ [समीकरण (1) से]

या $(1+x^2)\frac{dy}{dx} = y$

अतः फलन $y = e^{\tan^{-1}x}$ अवकल समीकरण $(1+x^2)\frac{dy}{dx} = y$ का हल है। **उत्तर**

3) वक्रों के कुल $y^2 = a(b-x)(b+x)$ का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए। [CBSE 2004]

हल : दिए हुए वक्र कुल का समीकरण

$$y^2 = a(b-x)(b+x)$$

या $$y^2 = a(b^2 - x^2) \quad \ldots(1)$$

समीकरण (1) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$2y\frac{dy}{dx} = a(-2x)$$

या $$y\frac{dy}{dx} = -ax \quad \ldots(2)$$

समीकरण (2) का पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -a \quad \ldots(3)$$

समीकरण (3) से $(-a)$ का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$y\frac{dy}{dx} = \left\{y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}x$$

या $$xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \ldots(4)$$

उत्तर

अतः समीकरण (4) अभीष्ट अवकल समीकरण है।

4. अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = 1 - x + y - xy$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। [CBSE 2000 C]

हल : दिया गया अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = 1 - x + y - xy \quad \text{...(1)}$$

या $$\frac{dy}{dx} = (1 - x) + y(1 - x)$$

या $$\frac{dy}{dx} = (1 - x)(1 + y)$$

या $$\frac{dy}{1+y} = (1 - x)\,dx \quad \text{...(2)}$$

समीकरण (2) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int (1 - x)\,dx$$

या $$\log|1 + y| = x - \frac{x^2}{2} + C \quad \text{...(3)}$$

समीकरण (3), समीकरण (1) का व्यापक हल है। **उत्तर**

5. अवकल समीकरण

$$x^2y\,dx - (x^3 + y^3)\,dy = 0$$

को हल कीजिए।

हल : दिया गया अवकल समीकरण

$$x^2y\,dx - (x^3 + y^3)\,dy = 0$$

या $$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y}{x^3 + y^3} \qquad ...(1)$$

जो कि समघातीय है।

अब, $y = vx$ रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad ...(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से,

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx^3}{x^3 + v^3x^3} = \frac{x^3v}{x^3(1+v^3)}$$

या $$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^3}$$

या $$x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^3} - v$$

या $$x\frac{dv}{dx} = \frac{v - v - v^4}{1+v^3} = \frac{-v^4}{1+v^3}$$

या $$x\frac{dv}{dx} = -\frac{v^4}{1+v^3}$$

या $$\frac{1+v^3}{v^4}dv = -\frac{dx}{x}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$-\int\frac{1+v^3}{v^4}\,dv = \int\frac{dx}{x}$$

या $$-\int\frac{1}{v^4} - \int\frac{1}{v}\,dv = \int\frac{dx}{x}$$

या $$\frac{1}{3v^3} - \log v = \log x + \log C$$

या $$\frac{1}{3v^3} = \log v + \log x + \log C$$

या $$\frac{1}{3v^3} = \log(Cvx)$$

या $$\log(Cy) = \frac{x^3}{3y^3}$$

या $$Cy = e^{x^3/3y^3}$$

जो कि दी गई अवकल समीकरण का अभीष्ट हल है। **उत्तर**

6. बिन्दु (0, 2) से गुजरने वाले उस वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके बिन्दु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता बिन्दु (x, y) के x-निर्देशांक (भुज) तथा y-निर्देशांक (कोटि) के अन्तर के बराबर हो।

हल : वक्र के बिन्दु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{dy}{dx}$ होती है।

प्रश्नानुसार, $\frac{dy}{dx} = x - y$

या $\frac{dy}{dx} + y = x$ ...(1)

समीकरण (1) की तुलना $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर,

$$P = 1, Q = x$$

$\therefore$ $\text{I.F.} = e^{\int 1\, dx} = e^x$

समीकरण (1) को e^x से गुणा करने पर,

$$e^x \frac{dy}{dx} + ye^x = xe^x$$

या $\frac{d}{dx}(ye^x) = xe^x$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष समाकलन करने पर,

$$ye^x = \int xe^x\, dx$$

$$ye^x = x\int e^x\, dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x)\int e^x\, dx\right\}dx + C$$

$$= xe^x - \int 1\, e^x\, dx + C$$

या $y\, e^x = xe^x - e^x + C$ ...(2)

जो कि वक्र कुल (family of curves) का समीकरण है तथा बिन्दु (0, 2) से जाता है। अब समीकरण (2) में $x = 0$ तथा $y = 2$ रखने पर,

$$2e^0 = 0 \times e^0 - e^0 + C$$

या $2 = -1 + C$

या $C = 2 + 1 = 3$

C का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$ye^x = e^x(x - 1) + 3$$

या $y = (x - 1) + 3e^{-x}$

जो कि वक्र का अभीष्ट समीकरण है। **उत्तर**

प्रश्न 7. $xy = \log y + C : y' = \dfrac{y^2}{1-xy}$ $(xy \neq 1)$

हल : दिया हुआ फलन

$$xy = \log y + C \qquad ...(1)$$

समीकरण (1) के दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$x\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

या $\quad xy' + y = \dfrac{1}{y} \cdot y' \quad \left(\because \dfrac{dy}{dx} = y'\right)$

या $\quad xyy' + y^2 = y'$

या $\quad y^2 = y' - xyy'$

या $\quad y^2 = y'(1 - xy)$

या $\quad y' = \dfrac{y^2}{1-xy}$

अतः दिया गया फलन $xy = \log y + C$, अवकल समीकरण

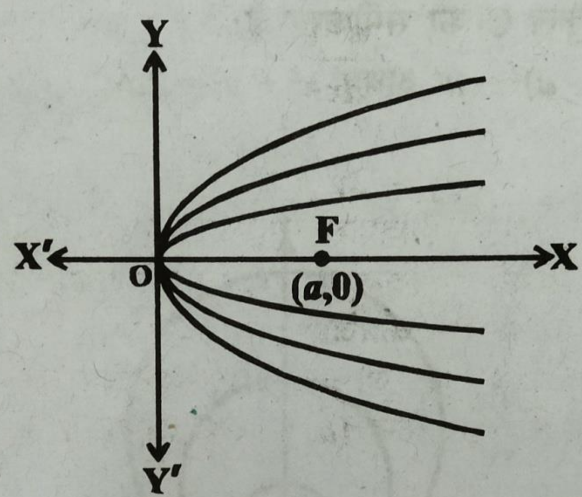
$y' = \dfrac{y^2}{1-xy}$ का हल है। **उत्तर**

8. ऐसे परवलयों के कुल को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जिनका शीर्ष मूल बिंदु पर है तथा जिनका अक्ष धनात्मक x-अक्ष की दिशा में है।

हल : माना कि उपरोक्त चर्चित परवलयों के कुल को P से निर्दिष्ट किया जाता है और उस कुल के किसी सदस्य की नाभि $(a, 0)$ पर है जिसमें a एक धनात्मक स्वेच्छ अचर है (आकृति देखिए)।

इसलिए कुल P का समीकरण है:

$$y^2 = 4ax \quad \text{... (1)}$$



समीकरण (1) के दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a \quad \text{... (2)}$$

समीकरण (2) से $4a$ का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$y^2 = \left(2y\frac{dy}{dx}\right)(x)$$

अथवा $$y^2 - 2xy\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{... (3)}$$

समीकरण (3) दिए हुए परवलयों के कुल का अवकल समीकरण है। **उत्तर**

9. अवकल समीकरण

$$(1-y^2)\frac{dx}{dy} + yx = ay \; \{-1 < y < 1\}$$

का समाकलन गुणक है :

(A) $\frac{1}{y^2-1}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$

(C) $\frac{1}{1-y^2}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

हल : दिया हुआ अवकल समीकरण

$$(1-y^2)\frac{dx}{dy} + yx = ay$$

या $$\frac{dx}{dy} + \frac{y}{1-y^2}x = \frac{ay}{1-y^2} \quad \ldots(1)$$

समीकरण (1) की तुलना $\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$ से करने पर

$$P_1 = \frac{y}{1-y^2}, \; Q_1 = \frac{ay}{1-y^2}$$

$$\therefore \quad \text{I.F.} = e^{\int \frac{y}{1-y^2} dy} = e^{-\frac{1}{2}\log(1-y^2)}$$

$$= e^{\log(1-y^2)^{-1/2}}$$

$$= (1-y^2)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$\therefore$ समाकलन गुणक

$$(\text{I.F.}) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

अतः विकल्प (D) सही है। **उत्तर**

प्रश्न 10. अवकल समीकरण

$$ye^{x/y}\,dx = (xe^{x/y} + y^2)dy \; (y \neq 0)$$

का हल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया हुआ अवकल समीकरण

$$ye^{x/y}\,dx = (xe^{x/y} + y^2)\,dy$$

या $$ye^{x/y}\frac{dx}{dy} = xe^{x/y} + y^2$$

या $$e^{x/y}\left[y\frac{dx}{dy} - x\right] = y^2$$

या $$\frac{e^{x/y}\left[y\frac{dx}{dy} - x\right]}{y^2} = 1 \qquad \ldots(1)$$

माना $$e^{x/y} = u$$

y के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{e^{x/y}\left[y\frac{dx}{dy} - x.1\right]}{y^2} = \frac{du}{dy} \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से,

$$\frac{du}{dy} = 1$$

या $$du = dy$$

समाकलन करने पर,

$$\int du = \int dy + C$$

या $$u = y + C$$

या $$e^{x/y} = y + C$$

जो कि अभीष्ट हल है। उत्तर

प्रश्न 11. निम्न अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{y^2}$$ **[RBSE 2017]**

हल : दिया है, $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{y^2}$

$\Rightarrow \quad y^2\,dy = 2x\,dx$

समाकलन करने पर,

$\Rightarrow \quad \int y^2 dy = \int 2x\,dx$

$\Rightarrow \quad \frac{y^3}{3} = x^2 + C$ **उत्तर**

---

12. अवकल समीकरण $2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0$ की कोटि है—

(A) 2 (B) 1

(C) 0 (D) परिभाषित नहीं है

उत्तर—(A)

हल—इस अवकल समीकरण में उपस्थित उच्चतम कोटि अवकलन $\frac{d^2y}{dx^2}$ है एवं $\frac{d^2y}{dx^2}$ की अधिकतम घातांक इकाई है एवं अवकल समीकरण की कोटि = 2 एवं घात = 1 है अर्थात् सही विकल्प (A) है।

---

13) अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\sin\left(\frac{dy}{dx}\right)+1=0$ की घात है—

(A) 3 (B) 2

(C) 1 (D) परिभाषित नहीं है

उत्तर—(D)

हल— $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\sin\left(\frac{dy}{dx}\right)+1=0$

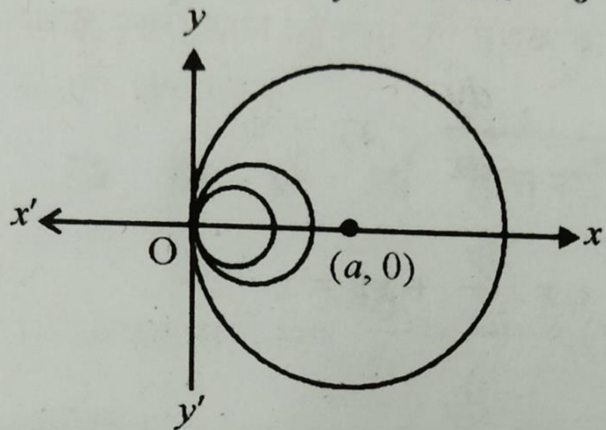
इस अवकल समीकरण में उपंस्थित उच्चतम कोटि अवकलन $\frac{d^2y}{dx^2}$ है एवं यह समीकरण $\frac{dy}{dx}$ में बहुपदीय नहीं है अतः इसकी कोटि 2 है एवं इसकी घात परिभाषित नहीं है अर्थात् सही विकल्प (D) है।

14) y-अक्ष को मूल बिन्दु पर स्पर्श करने वाले वृत्तों के कुल का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल—ऐसे वृत्त का समीकरण जो y-अक्ष पर मूल बिन्दु पर स्पर्श करता है और जिसकी त्रिज्या a हो

उसका समीकरण होगा $\quad (x-a)^2 + y^2 = a^2$

या $\quad x^2 + y^2 - 2a\,x = 0 \quad \ldots\text{(i)}$



x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2a = 0$$

$\therefore$
$$a = x + y\frac{dy}{dx}$$

a का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$x^2 + y^2 - 2x\left(x + y\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x^2 - 2xy\frac{dy}{dx} = 0$$

या
$$2xy\frac{dy}{dx} + x^2 - y^2 = 0$$

$\Rightarrow$
$$2xy\,y' + x^2 = y^2 \text{ उत्तर}$$

15) अवकल समीकरण $xy\dfrac{dy}{dx} = (x+2)(y+2)$ के लिए बिन्दु $(1, -1)$ से गुजरने वाला वक्र ज्ञात कीजिए।

हल—दिया है

$$xy\frac{dy}{dx} = (x+2)(y+2)$$

$x(y+2)$ से भाग देने पर

$$\frac{y}{y+2}\frac{dy}{dx} = \frac{(x+2)}{x} \text{ या } \frac{y}{y+2}dy$$

$$= \frac{x+2}{x}dx$$

समाकलन करने पर

$$\int \frac{y}{y+2}dy = \int \frac{x+2}{x}dx$$

यां $$\int \frac{y+2-2}{y+2}dy = \int \left(1+\frac{2}{x}\right)dx$$

या $$\int \left(1-\frac{2}{y+2}\right)dy = \int \left(1+\frac{2}{x}\right)dx$$

$\therefore$ $y - 2\log|(y+2)| = x + 2\log|x| + C$ ....(i)

यह वक्र $(1-1)$ से गुजरता है अत:

$$-1 - 2\log 1 = 1 + 2\log 1 + C$$

$$\therefore C = -2$$

(i) में C का मान रखने पर

$$y - 2\log|(y+2)| = x + 2\log|x| - 2$$
$$y = 2\log|(y+2) + x + 2\log|x| - 2$$
$$= 2(\log|(y+2)| + \log|x|) + x - 2$$

दिए हुए अवकल समीकरण का हल

$$y = x + 2\log x(y+2) - 2$$

या $y - x + 2 = \log[x^2(y+2)^2]$ उत्तर

16. $\frac{dx}{dy} = h\left(\frac{x}{y}\right)$ के रूप वाले समघातीय अवकल समीकरण को हल करने के लिए निम्नलिखित में से कौनसा प्रतिस्थापन किया जाता है—

(A) $y = vx$ (B) $v = yx$

(C) $x = vy$ (D) $x = v$

उत्तर— (C)

हल— $\frac{dx}{dy} = h\left(\frac{x}{y}\right)$ समघात अवकल समीकरण इसलिये $x = vy$ प्रतिस्थापन करना होगा।

अतः सही विकल्प (C) है।

17) $\frac{dy}{dx} + 2y \tan x = \sin x; y = 0$ यदि $x = \frac{\pi}{3}$

हल—प्रश्नानुसार अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + 2y \tan x = \sin x$

समीकरण $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से तुलना करने पर

यहाँ $P = 2 \tan x$ तथा $Q = \sin x$

$$\therefore \int P\, dx = 2\int \tan x\, dx = -2 \log \cos x$$

$$= \log (\cos x)^{-2} = \log \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \log \sec^2 x$$

$$\text{I.F.} = e^{\int P\,dx} = e^{\log \sec^2 x} = \sec^2 x$$

अतः अवकल समीकरण का हल

$$y \times \text{I.F.} = \int Q \times \text{I.F.}\, dx + C$$

$$y \times \sec^2 x = \int \sin x \sec^2 x\, dx + C$$

$$= \int \sec x \tan x + C = \sec x + C$$

अब $x = \frac{\pi}{3}$ तथा $y = 0$ रखने पर

$$0 \times \sec^2 \frac{\pi}{3} = \sec\frac{\pi}{3} + C$$

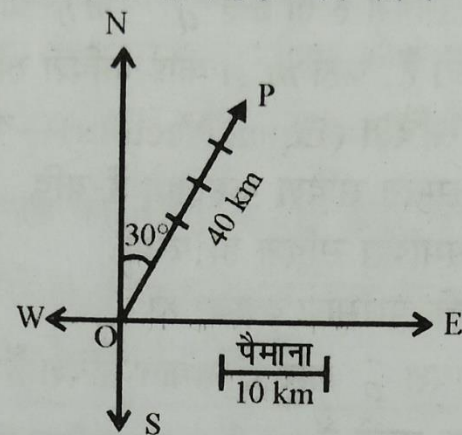
$$0 = 2 + C \therefore C = -2$$

अतः अभीष्ट हल

$y \sec^2 x = \sec x - 2$ या $y = \cos x - 2 \cos^2 x$ उत्तर

1. उत्तर से 30° पूर्व में 40 km के विस्थापन का आलेखीय निरूपण कीजिए।

हल— पैमाना 10 km को 1 cm मानकर 4 cm का एक रेखाखण्ड OP उत्तर की दायीं ओर उत्तर के साथ 30° का कोण बनाते हुये खींचा।



इस प्रकार सदिश $\overrightarrow{OP}$, उत्तर से 30° पूर्व में 40 km के विस्थापन को निरूपित करेगा। उत्तर

2. मान लीजिये $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j}$ और $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j}$ तब क्या $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ है? क्या सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समान हैं? **(NCERT)**

हल—

$$\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j}$$

$$\therefore \quad |\vec{a}| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j}$$

$$\therefore \quad |\vec{b}| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ आपस में समान नहीं हैं चूँकि इनके संगत घटक समान नहीं हैं अर्थात् इनके संगत घटक भिन्न हैं।

3. समान दिशा वाले दो विभिन्न सदिश लिखिए।

हल— माना कि समान दिशा वाले दो सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$ हैं।

$$\vec{a} \text{ के दिक्-कोसाइन} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\vec{b} \text{ के दिक्-कोसाइन} = \left(\frac{3}{\sqrt{27}}, \frac{3}{\sqrt{27}}, \frac{3}{\sqrt{27}}\right)$$

$$\text{या } \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

इस प्रकार $\vec{a}, \vec{b}$ एक ही दिशा में हैं परन्तु

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$|\vec{a}| \neq |\vec{b}| \Rightarrow \vec{a} \neq \vec{b}$$

---

4) दर्शाइए कि सदिश $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ और $-4\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$ संरेख हैं।

हल— माना कि $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$

तथा $\vec{b} = -4\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$

$= -2(2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}) = -2\vec{a}$

$\Rightarrow \vec{b} = -2\vec{a}$

$\vec{a}$ और $\vec{b}$ संरेख हैं यानी $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ और $-4\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$ संरेख हैं।

---

5. यदि दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ इस प्रकार हैं कि $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ और $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$ तो $|\vec{a} - \vec{b}|$ ज्ञात कीजिए। **(NCERT)**

हल—हम पाते हैं कि

7) यदि $\vec{a} = 0$ अथवा $\vec{b} = 0$, तब $\vec{a}.\vec{b} = 0$ परन्तु विलोम का सत्य होना आवश्यक नहीं है। एक उदाहरण द्वारा अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

9) एक आयत के शीर्षों A, B, C और D जिसके स्थिति सदिश क्रमशः

$$-\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k},\ \hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k},\ \hat{i}-\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k},\ -\hat{i}-\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k}$$

हैं, का क्षेत्रफल है :

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1

(C) 2 (D) 4

उत्तर—(C)

हल— $\overrightarrow{AB}$ = B का स्थिति सदिश – A का स्थिति सदिश

$$= \left(\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k}\right)-\left(-\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k}\right)$$

$$= 2\hat{i}$$

और $\overrightarrow{AD}$ = D का स्थिति सदिश – A का सदिश का स्थिति सदिश

$$= \left(-\hat{i}-\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k}\right)-\left(-\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k}\right)$$

$$= -\hat{j}$$

आयत का क्षेत्रफल

$$= |\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AD}|$$

$$= \left(\sqrt{(2)^2+0^2+0^2}\right)\times\left(\sqrt{0^2+(-1)^2+0^2}\right)$$

$$= \sqrt{4}\times\sqrt{1} = 2\times 1$$

= 2 वर्ग इकाई

अतः सही विकल्प (C) है।

10) यदि $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$, तब क्या यह सत्य है कि $|\vec{a}| = |\vec{b}| + |\vec{c}|$? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

हल—प्रश्नानुसार $\qquad \vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$

अब माना कि

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| + |\vec{c}|$$

वर्ग करने पर

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{b} + \vec{c}|^2 = (\vec{b} + \vec{c}).(\vec{b} + \vec{c})$$

$$= \vec{b}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{b} + \vec{c}.\vec{c}$$

$$= |\vec{b}|^2 + 2(\vec{b}.\vec{c}) + |\vec{c}|^2$$

$$\left(\because \vec{c}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c}, \vec{b}.\vec{b} = |\vec{b}|^2, \vec{c}.\vec{c} = |\vec{c}|^2\right)$$

$$= |\vec{b}|^2 + 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta + |\vec{c}|^2$$

जब θ, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ बीच का कोण है।

(i) यदि $\theta = 0, \cos 0 = 1$

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + 2|\vec{b}||\vec{c}| + |\vec{c}|^2 = (|\vec{b}| + |\vec{c}|)^2$$

$\therefore \qquad |\vec{a}| = |\vec{b}| + |\vec{c}|$

(ii) यदि $\theta \neq 0, \cos\theta \neq 1$

$$|\vec{a}|^2 \neq (|\vec{b}| + |\vec{c}|)^2$$

या $\qquad |\vec{a}| \neq |\vec{b}| + |\vec{c}|$

अतः यह आवश्यक नहीं है कि $|\vec{a}| = |\vec{b}| + |\vec{c}|$

11) $\hat{i}.(\hat{j}\times\hat{k})+\hat{j}.(\hat{i}\times\hat{k})+\hat{k}.(\hat{i}\times\hat{j})$ का मान है—

(A) 0 (B) – 1 (C) 1 (D) 3

उत्तर—(C)

हल— $\hat{i}.(\hat{j}\times\hat{k})+\hat{j}.(\hat{i}\times\hat{k})+\hat{k}.(\hat{i}\times\hat{j})$

$$= \hat{i}.(\hat{i})+\hat{j}.(-\hat{j})+\hat{k}.(\hat{k})$$

$$= |\hat{i}|^2-|\hat{j}|^2+|\hat{k}|^2$$

$$= 1^2-1^2+1^2 = 1-1+1 = 1$$

अतः सही विकल्प (C) है।

12. सदिश $\vec{a} = \hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ दोनों के लम्बवत एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिये, जिसका परिमाण $\sqrt{171}$ हो।

हल—दिया है $\vec{a} = \hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}\,(4-3)-\hat{j}\,(2+9)+\hat{k}\,(-1-6)$$

$$\therefore \vec{a}\times\vec{b} = \hat{i}-11\,\hat{j}-7\,\hat{k}$$

$(\vec{a}\times\vec{b})$ के लम्बवत इकाई सदिश

$$\hat{n} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|} = \frac{\hat{i}-11\hat{j}-7\hat{k}}{\sqrt{1^2+(-11)^2+(-7)^2}}$$

$$\hat{n} = \frac{\hat{i}-11\hat{j}-7\hat{k}}{\sqrt{1+121+49}} = \frac{\hat{i}-11\hat{j}-7\hat{k}}{\sqrt{171}}$$

अतः $(\vec{a}\times\vec{b})$ के लम्बवत $\sqrt{171}$ इकाई परिमाण वाला सदिश

$$= \sqrt{171}\ \hat{n}$$

$$= \sqrt{171}\ \frac{-\hat{i}-11\hat{j}-7\hat{k}}{\sqrt{171}} = -\ \hat{i}-11\hat{j}-7\hat{k}$$ उत्तर

13) सदिश $\vec{a}$, $\vec{b}$ व $\vec{c}$ इस प्रकार से हैं कि $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ और $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$ एवं $|\vec{c}|=7$ तब $\vec{a}$ व $\vec{b}$ के बीच कोण ज्ञात कीजिए।

हल— $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$

$\Rightarrow \quad \vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$

$\Rightarrow \quad (\vec{a}+\vec{b})=(-\vec{c})^2$

$\Rightarrow \quad (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{c})=(-\vec{c})\cdot(-\vec{c})$

$\Rightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{c}$

$\Rightarrow \quad |\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2$

$[\because \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}]$

$\Rightarrow \quad |\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta+|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2$

$\Rightarrow \quad (3)^2+2(3)(5)\cos\theta+(5)^2=(7)^2$

$\Rightarrow \quad 9+30\cos\theta+25=49$

$\Rightarrow \quad \cos\theta=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad \theta=\frac{\pi}{3}$

अतः $\vec{a}$ व $\vec{b}$ के बीच कोण $\frac{\pi}{3}$ है। उत्तर

14) उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (a, b, c) से गुजरता है और यह समतल $\vec{r}.(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=2$ के समान्तर है।

हल— चूँकि अभीष्ट समतल $\vec{r}.(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=2$ के समान्तर है अतः अभीष्ट समतल का अभिलम्ब

$$\vec{n}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k} \qquad \ldots(1)$$

अतः इसका समीकरण

$(\vec{r}-\vec{p}).\vec{n}=0$

$\Rightarrow \quad \vec{r}\cdot\vec{n}=\vec{p}\cdot\vec{n}$

$\Rightarrow \quad \vec{r}.(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=(a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k})\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$

$\Rightarrow \quad \vec{r}.(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=a+b+c$ उत्तर

1. **अध्याय–9 प्रायिकता**

1) यदि $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.5$ और $P(B/A) = 0.4$ ज्ञात कीजिए—

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A/B)$

(iii) $P(A \cup B)$

हल—प्रश्नानुसार

$$P(A) = 0.8,\ P(B) = 0.5,\ P(B/A) = 0.4$$

(i) $$\because P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

अतः

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B/A)$$

$$= 0.8 \times 0.4 = 0.32 \text{ उत्तर}$$

(ii) $$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.32}{0.5} = \frac{32}{50} = \frac{16}{25}$$

$$= 0.64 \text{ उत्तर}$$

(iii) $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0.8 + 0.5 - 0.32$$

$$= 1.30 - 0.32 = 0.98 \text{ उत्तर}$$

2) एक पासे को तीन बार उछाला गया है—

E : तीसरी उछाल पर संख्या 4 प्रकट होना।

F : पहली दो उछालों पर क्रमशः 6 तथा 5 प्रकट होना।

हल—एक पासे को 3 बार उछाला गया

$\therefore$ प्रतिदर्श समष्टि में $6\times6\times6 = 216$ परिणाम है।

E : तीसरी उछाल पर संख्या 4 प्रकट होती है।

$= \{(1, 1, 4), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (1, 4, 4), (1, 5, 4), (1, 6, 4)$

$(2, 1, 4), (2, 2, 4), (2, 3, 4), (2, 4, 4), (2, 5, 4), (2, 6, 4)$

$(3, 1, 4), (3, 2, 4), (3, 3, 4), (3, 4, 4), (3, 5, 4), (3, 6, 4)$

$(4, 1, 4), (4, 2, 4), (4, 3, 4), (4, 4, 4), (4, 5, 4), (4, 6, 4)$

$(5, 1, 4), (5, 2, 4), (5, 3, 4), (5, 4, 4), (5, 5, 4), (5, 6, 4)$

$(6, 1, 4), (6, 2, 4), (6, 3, 4), (6, 4, 4), (6, 5, 4), (6, 6, 4)\}$

= 36 परिणाम

F = पहली दो उछालों पर क्रमशः 6 तथा 5 प्रकट होना

$= (6, 5, 1), (6, 5, 2), (6, 5, 3), (6, 5, 4), (6, 5, 5), (6, 5, 6)$

= 6 परिणाम

$$E \cap F = \{(6, 5, 4)\}$$

$$\therefore \quad P(E \cap F) = \frac{1}{216}, \; P(F) = \frac{6}{216}$$

अतः

$$P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{1}{216} \div \frac{6}{216}$$

$$= \frac{1}{6}$$ **उत्तर**

3) एक प्रशिक्षक के पास 300 सत्य/असत्य प्रकार के आसान प्रश्न, 200 सत्य/असत्य प्रकार के कठिन प्रश्न, 500 बहु–विकल्पीय प्रकार के आसान प्रश्न और 400 बहु–विकल्पीय प्रकार के कठिन प्रश्नों का संग्रह है। यदि प्रश्नों के संग्रह से एक प्रश्न यादृच्छया चुना जाता है तो एक आसान प्रश्न की बहु–विकल्पीय होने की प्रायिकता क्या होगी?

हल—कुल प्रश्न $= 300 + 200 + 500 + 400 = 1400$

माना कि E : 'आसान प्रश्न' $\Rightarrow n(E) = 300 + 500 = 800$

F : 'बहु–विकल्पीय प्रश्न' $\Rightarrow n(F) = 500 + 400 = 900$

$\therefore$ $E \cap F$: 'आसान बहु–विकल्पीय प्रश्न' $\Rightarrow n(E \cap F) = 500$

अब $$P\left(\frac{E}{F}\right) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{500/1400}{900/1400}$$

$$= \frac{5}{9}$$ उत्तर

4) यह दिया गया है कि दो पासों को फेंकने पर प्राप्त संख्याएँ भिन्न–भिन्न हैं। दोनों संख्याओं का योग 4 होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल—दो पासों को फेंकने से प्रतिदर्श समष्टि के परिणाम $= 6 \times 6 = 36$ हैं।

मान लिया A = दो संख्याओं का योग 4 है

$$= \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$$

$$\Rightarrow n(A) = 3$$

दो पासों को फेंकने पर समान संख्या वाले परिणाम

$$= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

B = जब संख्या भिन्न हो तो ऐसे परिणाम $= 36 - 6 = 30$

$$A \cap B = \{(1, 3), (3, 1)\} \Rightarrow n(A \cap F) = 2$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36}, P(B) = \frac{30}{36}$$

अतः $$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{36} \div \frac{30}{36} = \frac{2}{30}$$

$$= \frac{1}{15}$$ उत्तर

5) यदि $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = 0$, $P(A/B)$ है—

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$

(C) परिभाषित नहीं (D) 1

उत्तर—(C)

हल—$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

जोकि अपरिभाषित है जब $P(B) = 0$ या $B = \{ \} = \phi$

अर्थात् विकल्प (C) सही है।

6) एक न्याय्य सिक्का और एक अभिनत पासे को उछाला गया। मान लें A घटना 'सिक्के पर चित प्रकट होता है' और B घटना 'पासे पर संख्या 3 प्रकट होती है' को निरूपित करते हैं। निरीक्षण कीजिए कि घटनाएँ A और B स्वतंत्र हैं या नहीं?

हल—जब सिक्का और पासा उछाला जाता है तो प्रतिदर्श समष्टि

$$S = \{(H, 1), (H, 2), (H, 3), (H, 4), (H, 5), (H, 6), (T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6)\}$$

$\Rightarrow$ $n(S) = 12$

$$A = (H, 1), (H, 2), (H, 3), (H, 4), (H, 5), (H, 6)\}$$

$\Rightarrow$ $n(A) = 6$

तथा $B = \{(H, 3), (T, 3)\} \Rightarrow n(B) = 2$

$\therefore$ $A \cap B = \{(H, 3)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1$

अब $P(A) = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$,

$$P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

$\therefore$ $P(A) \,.\, P(B) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{12} = P(A \cap B)$

$\therefore$ A, B स्वतंत्र हैं। उत्तर

7) मान लें E तथा F दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $P(E) = \frac{3}{5}$, $P(F) = \frac{3}{10}$ और $P(E \cap F) = \frac{1}{5}$, तब क्या E तथा F स्वतन्त्र हैं?

हल— प्रश्नानुसार $$P(E) = \frac{3}{5} \text{ तथा } P(F) = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \quad P(E) \times P(F) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{50}$$

तथा $$P(E \cap F) = \frac{1}{5}$$

$$P(E \cap F) \neq P(E) \times P(F)$$

$\therefore$ E और F स्वतन्त्र नहीं हैं। **उत्तर**

8. मान लें A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं तथा $P(A) = 0.3$, और $P(B) = 0.4$, तब

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A \cup B)$

(iii) $P(A/B)$ (iv) $P(B/A)$ ज्ञात कीजिए।

हल— A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं तथा

प्रश्नानुसार

$$P(A) = 0.3, P(B) = 0.4$$

(i) $$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$
$$= 0.3 \times 0.4 = 0.12 \text{ उत्तर}$$

(ii) $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.3 + 0.4 - 0.12 = 0.7 - 0.12$$
$$= 0.58 \text{ उत्तर}$$

(iii) $$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.12}{0.4} = \frac{12}{40}$$
$$= 0.3 \text{ उत्तर}$$

(iv) $$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.12}{0.3} = \frac{12}{30}$$
$$= 0.4 \text{ उत्तर}$$

9) यदि पासों का एक जोड़ा उछाला जाता है तो प्रत्येक पासे पर सम अभाज्य संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता निम्नलिखित में से क्या है—

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{36}$

उत्तर—(D)

हल— $n(S) = 6\times6 = 36$

घटना E : "प्रत्येक पासे पर सम अभाज्य संख्या है।"

इसलिए $E = \{(2,2)\}$

चूँकि मात्र 2 ही सम अभाज्य संख्या है।

$\Rightarrow \quad P(E) = \frac{1}{36}$

अतः सही विकल्प (D) है।

10) तीन सिक्के दिए गए हैं। एक सिक्के के दोनों ओर चित ही है। दूसरा सिक्का अभिनत है जिसमें चित 75% बार प्रकट होता है और तीसरा सिक्का अनभिनत है। तीनों में से एक सिक्के को यादृच्छया चुना गया और उसे उछाला गया है। यदि सिक्के पर चित प्रकट हो, तो क्या प्रायिकता है कि वह दोनों चित वाला सिक्का है?

हल—तीनों सिक्कों में से एक सिक्का चुनने की घटना

E_1 = पहला सिक्का चुना गया, E_2 = दूसरा सिक्का चुना गया, E_3 = तीसरा सिक्का चुना गया।

A = सिक्का उछालने पर चित का प्राप्त होना

तीन सिक्कों में से एक सिक्का चुना गया

अर्थात् $P(E_1) = \frac{1}{3}, P(E_2) = \frac{1}{3}, P(E_3) = \frac{1}{3}$

पहले सिक्के के दोनों ओर चित है तब प्रायिकता (सिक्का उछालने पर चित का प्राप्त होना जबकि पहला सिक्का उछाला गया) $= P(A/E_1) = 1$

दूसरा सिक्का इस प्रकार अनभिनत है कि

$$P(A/E_2) = 75\% = 0.75 = \frac{3}{4}$$

तीसरा सिक्का अनभिनत है $P(A/E_3) = \frac{1}{2}$

P(सिक्के पर चित हो और पहला सिक्का हो) तो

बेज़ प्रमेय से

$$P(E_1/A) = \frac{P(E_1)\,P(A/E_1)}{P(E_1)\,P(A/E_1) + P(E_2)\,P(A/E_2) + P(E_3)\,P(A/E_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{3}\times 1 + \frac{1}{3}\times\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}} = \frac{1}{1+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}} = \frac{4}{4+3+2} = \frac{4}{9}$$ **उत्तर**

11) दो दल एक निगम के निदेशक मण्डल में स्थान पाने की प्रतिस्पर्द्धा में हैं। पहले तथा दूसरे दल के जीतने की प्रायिकताएँ क्रमश: 0.6 तथा 0.4 हैं। इसके अतिरिक्त यदि पहला दल जीतता है तो एक नए उत्पाद के प्रारम्भ होने की प्रायिकता 0.7 है और यदि दूसरा दल जीतता है तो इस बात की संगत प्रायिकता 0.3 है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि नया उत्पादन दूसरे दल द्वारा प्रारम्भ किया गया था।

हल— माना कि E_1 = पहले दल के जीतने की घटना

E_2 = दूसरे दल के जीतने की घटना

E = एक नए उत्पाद का प्रारम्भ होना

E/E_1 = पहला दल नया उत्पाद प्रारम्भ करेगा।

E/E_2 = दूसरा दल नया उत्पाद प्रारम्भ करेगा।

$P(E_1) = 0.6, \quad P(E_2) = 0.4$

$P(E/E_1) = 0.7 \quad P(E/E_2) = 0.3$

अब बेज़ प्रमेय से $P(E_2/E) = P$

(नया उत्पाद दूसरे दल ने प्रारम्भ किया)

$$= \frac{P(E_2)\,P(E/E_2)}{P(E_2)\,P(E/E_2) + P(E_1)\,P(E/E_1)}$$

$$= \frac{0.4 \times 0.3}{0.4 \times 0.3 + 0.6 \times 0.7}$$

100 से अंश व हर को गुणा करने पर

$$P(E_2/E) = \frac{12}{12+42} = \frac{12}{54} = \frac{2}{9} \text{ उत्तर}$$

12) यदि A और B ऐसी घटनाएँ हैं कि $A \subset B$ तथा $P(B) \neq 0$, तो निम्न में से कौन ठीक है—

(A) $P(A/B) = \dfrac{P(B)}{P(A)}$

(B) $P(A/B) < P(A)$

(C) $P(A/B) \geq P(A)$

(D) इनमें से कोई नहीं।

उत्तर—(C)

हल—जब $A \subset B$ तब

$$A \cap B = A$$

अब $$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \geq P(A)$$

$$\left(\because\ 0 < P(B) \leq 1,\ \frac{1}{P(B)} \geq 1\right)$$

अतः सही विकल्प (C) है।

13) एक सिक्का समसर्वय सन्तुलित नहीं है, जिसमें चित प्रकट होने की सम्भावना पट प्रकट होने की सम्भावना की तीन गुनी है। यदि सिक्का दो बार उछाला जाता है तो पटों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

हल—प्रश्नानुसार चित और पट आने की प्रायिकता का अनुपात

$$= 3 : 1$$

अर्थात् यदि पट x बार आता है तो चित $3x$ बार आएगा।

$$\therefore\ P(H) = \frac{3x}{x + 3x} = \frac{3}{4} \text{ तथा } P(T) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(0) = P(\text{कोई पट नहीं}) = P(HH) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

$$P(1) = 2 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{6}{16}$$

$$P(2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

अतः पट का प्रायिकता बंटन इस प्रकार होगा—

X	0	1	2
$P(x)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$

उत्तर

14) एक यादृच्छिक चर X का प्रायिकता फलन $P(x)$ निम्न प्रकार से है, जहाँ x कोई संख्या है—

$$P(x) = \begin{cases} k \text{ यदि } x = 0 \\ 2k \text{ यदि } x = 1 \\ 3k \text{ यदि } x = 2 \\ 0 \text{ अन्यथा} \end{cases}$$

(a) k का मान ज्ञात कीजिए।

(b) $P(X < 2), P(X \leq 2), P(X \geq 2)$ ज्ञात कीजिए।

हल—(a) प्रायिकताओं का योगफल $= \Sigma P(X) = 1$

$\therefore \quad k + 2k + 3k + 0 = 1$ या $6k = 1$

या $\quad k = \frac{1}{6}$ उत्तर

(b) (i) $P(X < 2) = P(0) + P(1) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6}$

$= \frac{1}{2}$ उत्तर

(ii) $P(X \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2)$

$= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{6}{6} = 1$ उत्तर

15. एक इलेक्ट्रॉनिक एसेंबली के दो सहायक निकाय A और B हैं। पूर्ववर्ती निरीक्षण द्वारा निम्न प्रायिकताएँ ज्ञात हैं :

P(A के असफल होने की) = 0.2

P(B के अकेले असफल होने की) = 0.15

P(A और B के असफल होने की) = 0.15

तो निम्न प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए :

(i) P(A असफल/B असफल हो चुकी हो)

(ii) P(A के अकेले असफल होने की)।

हल— माना कि घटना A और B के असफल होने को A, B से व्यक्त किया गया है।

प्रश्नानुसार $P(A) = 0.2$

P(A और B का असफल होना)

$$= P(A \cap B) = 0.15$$

P(B के अकेले असफल होना)

$$= P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.15$$

या $P(B) - 0.15 = 0.15$

$\therefore$ $P(B) = 0.15 + 0.15 = 0.30$

अतः $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.15}{0.30}$

$$= \frac{1}{2} = 0.5$$ उत्तर

P(A अकेले असफल होता है)

= P(A अकेले ही)

$$= P(A) - P(A \cap B)$$
$$= 0.2 - 0.15 = 0.05$$ उत्तर

17. एक वृत्त की त्रिज्या $r = 6$ cm. पर r के सापेक्ष क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर है :

(A) 10π (B) 12π

(C) 8π (D) 11π

उत्तर— (B)

हल— वृत्त का क्षेत्रफल $A = \pi r^2$

$$\Rightarrow \quad \frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

जब $r = 6$ तब $\frac{dA}{dr} = 2\pi \times 6 = 12\pi$

अतः सही विकल्प (B) है।

26. वक्र $y = 2x^2 + 3 \sin x$ के $x = 0$ पर अभिलम्ब की प्रवणता है :

(A) 3 (B) $\frac{1}{3}$

(C) -3 (D) $-\frac{1}{3}$

उत्तर— (D)

हल— दिया गया वक्र का समीकरण

$$y = 2x^2 + 3 \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x + 3 \cos x$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0 + 3 \cos 0$$

$$= 0 + 3 \times 1 = 0 + 3$$

$$= 3$$

अतः अभिलम्ब की प्रवणता $= -\frac{1}{3}$

अतः सही विकल्प (D) है।

9. भुजा में 3% वृद्धि के कारण भुजा x के घन के आयतन में सन्निकट परिवर्तन है :

(A) $0.06\ x^3\ m^3$ (B) $0.6\ x^3\ m^3$
(C) $0.09\ x^3\ m^3$ (D) $0.9\ x^3\ m^3$

उत्तर— (C)

हल— घन का आयतन = (भुजा)$^3 = x^3$

$$\therefore \quad v = x^3 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 3x^2 \quad \ldots(1)$$

दिया गया है $\frac{\Delta x}{x} \times 100 = 3$

$$\Rightarrow \quad \Delta x = \frac{3x}{100}$$

आयतन में सन्निकट परिवर्तन

$$dv = \frac{dv}{dx} \times \Delta x$$
$$= 3x^2 \times \frac{3x}{100} = \frac{9x^3}{100}$$
$$= 0.09x^3\ m^3.$$

अतः सही विकल्प (C) है।

एक परिवर्तनशील घन का किनारा 3 cm./s की दर से बढ़ रहा है। घन का आयतन किस दर से बढ़ रहा है जबकि किनारा 10 cm. लम्बा है।

— माना कि घन का आयतन v तथा भुजा a है।

प्रश्नानुसार $\frac{da}{dt} = 3$ cm./s, $a = 10$ cm.

$$v = a^3 \quad \therefore \quad \frac{dv}{dt} = 3a^2 \frac{da}{dt}$$

$\therefore$ a और $\frac{da}{dt}$ का मान रखने पर

$$\frac{dv}{dt} = 3 \times 10^2 \times 3 = 300 \times 3$$
$$= 900 \text{ cm.}^3/s \text{ उत्तर}$$

एक गुब्बारा, जो सदैव गोलाकार रहता है, का परिवर्तनशील व्यास $\frac{3}{2}(2x+1)$ है। x के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

माना कि गुब्बारे का आयतन v है।

$$\because \quad \text{व्यास} = \frac{3}{2}(2x+1)$$

$$\therefore \quad \text{त्रिज्या} = \frac{3}{4}(2\pi+1)$$

$$\therefore \quad v = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{27}{64}(2\pi+1)^3$$

$$v = \frac{9\pi}{16}(2\pi+1)^3$$

x के सापेक्ष अवकलन करने से

$$\frac{dv}{dx} = \frac{9\pi}{16} \cdot 3(2x+1)^2 \frac{d}{dx}(2x+1)$$

$$= \frac{9\pi}{16} \cdot 3(2x+1)^2 \times 2$$

$$= \frac{27\pi}{8}(2x+1)^2 \text{ उत्तर}$$

5. अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ से प्रदत्त फलन f

(a) वर्धमान

(b) ह्रासमान।

हल— $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x^2 - x - 6)$

$= 6(x - 3)(x + 2)$

$x = -2, x = 3$ वास्तविक संख्या रेखा को तीन अन्तरालों में विभाजित करता है।

यह अन्तराल है $(-\infty, -2), (-2, 3), (3, \infty)$

जब $x \in (-\infty, -2)$ $\quad f'(x) = +ve$

जब $x \in (-2, 3)$ $\quad f'(x) = -ve$

जब $x \in (3, \infty)$ $\quad f'(x) = +ve$

अर्थात् (a) अन्तराल $(-\infty, -2) \cup (3, \infty)$ में f वर्धमान फलन है। **उत्तर**

(b) अन्तराल $(-2, 3)$ में $\quad f'(x) = -ve$

अर्थात् f ह्रासमान फलन है। **उत्तर**

उदाहरण 3. वक्र $y = 2x^2 - 6x - 4$ पर उस बिन्दु को ज्ञात कीजिये जहाँ पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर हो।

हल– माना कि अभीष्ट बिन्दु $P(x_1, y_1)$ है

दिये हुए वक्र के समीकरण से

$$y = 2x^2 - 6x - 4$$

इसलिए $$\frac{dy}{dx} = 4x - 6$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = 4x_1 - 6$$

चूँकि स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है, इसलिए

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = 0 \text{ रखने पर}$$

$$\Rightarrow \qquad 4x_1 - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

बिन्दु (x_1, y_1) वक्र पर स्थित है, इसलिए

$$y_1 = 2x_1^2 - 6x_1 - 4$$

जब $x_1 = \frac{3}{2}$, $y_1 = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{3}{2}\right) - 4$

$$y_1 = \frac{2 \times 9}{4} - 9 - 4 = \frac{9}{2} - 13$$

$$y_1 = \frac{-17}{2}$$

अंतः अभीष्ट बिन्दु $\left(\frac{3}{2}, \frac{-17}{2}\right)$ है।

22. परवलय $y^2 = 4ax$ के बिन्दु $(at^2, 2at)$ पर स्पर्श रेखा और अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल— वक्र का समीकरण $y^2 = 4ax$

अवकलन करने पर $2y\dfrac{dy}{dx} = 4a$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{4a}{2y} = \frac{2a}{y}$$

बिन्दु $(at^2, 2at)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता

$$= \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$$

स्पर्श रेखा का समीकरण $y - 2at = \dfrac{1}{t}(x - at^2)$

या $yt - 2at^2 = x - at^2,\ yt = x + at^2$

$\Rightarrow ty = x + at^2$ उत्तर

अब अभिलम्ब की प्रवणता $= -\dfrac{1}{m} = -t$

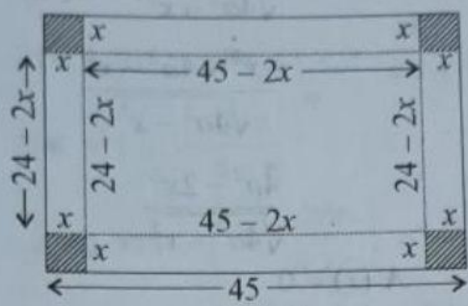
$\therefore$ अभिलम्ब का समीकरण

$$y - 2at = -t(x - at^2)$$

$\therefore \quad y = -tx + 2at + at^3$ उत्तर

18. 45 cm. × 24 cm. की टिन की आयताकार चादर के कोनों पर वर्ग काट कर तथा इस प्रकार बने टिन के फलकों को मोड़ कर ढक्कन रहित एक सन्दूक बनाना है। काटे जाने वाले वर्ग की भुजा कितनी होगी जिससे सन्दूक का आयतन उच्चतम हो।

हल— माना प्रत्येक कोने से x cm. भुजा काटी गई है।



∴ आयताकार सन्दूक की भुजाएँ $(45 - 2x)$, $(24 - 2x)$ और x cm. होंगी।

तब सन्दूक का आयतन

$$V = (45 - 2x)(24 - 2x)(x)$$
$$= 2x(45 - 2x)(12 - x)$$
$$= 2(2x^3 - 69x^2 + 540x)$$

$$\therefore \quad \frac{dV}{dx} = 2(6x^2 - 138x + 540)$$
$$= 12(x^2 - 23x + 90)$$

उच्चतम एवं निम्नतम आयतन के लिए

$$\frac{dV}{dx} = 0$$

या $12(x^2 - 23x + 90) = 0$

या $(x - 5)(x - 18) = 0$

$$\therefore \quad x = 5, 18$$

परन्तु x, 12 से अधिक नहीं हो सकता।

$$\therefore \quad x = 5$$

तथा $$\frac{d^2V}{dx^2} = 12(2x - 23)$$

$x = 5$ पर $$\frac{d^2V}{dx^2} = 12(10 - 23) = \text{ऋणात्मक}$$

∴ V, $x = 5$ के लिए उच्चतम है। उत्तर

हल– चूँकि खींचा गया अभिलम्ब x-अक्ष से $135°$ का कोण बनाता है

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \tan 135°$$

$$\frac{dy}{dx} = -1$$

अतः उत्तर का सही विकल्प (B) है।

5. वक्र $y^2 = 4x$ के बिन्दु $(1, 2)$ पर स्पर्श रेखा का ढाल है—

(A) 2 (B) − 2 (C) 1 (D) − 1

उत्तर–(C)

हल–

$$y^2 = 4x \qquad \therefore 2y\frac{dy}{dx} = 4$$

या $$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{4}{2y}$$

या $$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{at }(1,2)} = \frac{4}{2 \times 2} = 1$$

अतः उत्तर का सही विकल्प (C) है।

$= -34.995$ उत्तर

4. x m भुजा वाले घन की भुजा में 1% वृद्धि के कारण घन के आयतन में होने वाला सन्निकट परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

हल— हम जानते हैं कि $v = x^3$

भुजा में वृद्धि $= x$ का $1\% = 0.01\,x$

$$\therefore \quad \frac{dv}{dx} = 3x^2$$

आयतन में सन्निकट वृद्धि $dv = \frac{dv}{dx} \times \Delta x$

$= 3x^2\ \Delta x$

$= 3x^2 \times 0.01x$

$= .03x^3\ m^3$ उत्तर

9. निम्नलिखित फलन का उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिये–

$$2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$$

हल– माना $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$

इसलिये $\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 30x + 36$

तथा $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x - 30$

उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ के लिये $\frac{dy}{dx} = 0$

इसलिये $6x^2 - 30x + 36 = 0$

$\Rightarrow \quad 6(x^2 - 5x + 6) = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - 5x + 6 = 0$

या $(x - 3)(x - 2) = 0$

$\Rightarrow \quad x = 2, 3$

अब $x = 2$ पर, $\frac{d^2y}{dx^2} = 12 \times 2 - 30 = -6 < 0$

$x = 2$ पर फलन का मान उच्चिष्ठ होगा तथा फलन का उच्चिष्ठ मान

$$= 2(2)^3 - 15(2)^2 + 36(2) + 10$$
$$= 16 - 60 + 72 + 10$$
$$= 38$$

पुनः $x = 3$ पर $\frac{d^2y}{dx^2} = 12 \times 3 - 30 = 6 > 0$

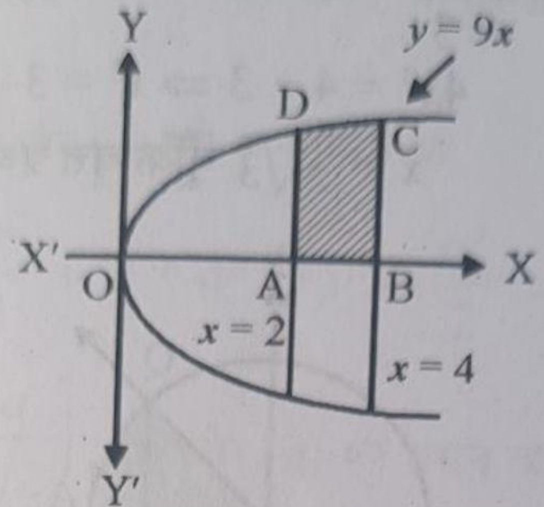
$x = 3$ पर फलन का मान निम्निष्ठ होगा तथा फलन का निम्निष्ठ मान

$$= 2(3)^3 - 15(3)^2 + 36(3) + 10$$
$$= 2 \times 27 - 15 \times 9 + 108 + 10$$
$$= 54 - 135 + 108 + 10 = 37$$

प्रथम चतुर्थांश में वक्र $y^2=9x, x=2, x=4$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

$y^2=9x$ एक परवलय है जिसका शीर्ष $(0, 0)$ है।

वक्र x-अक्ष के सममित है।



क्षेत्र जो वक्र $y^2=9x, x=2, x=4$ तथा x-अक्ष से घिरा है।

$$y^2 = 9x$$

$$\therefore \quad y = \sqrt{9x} = 3\sqrt{x}$$

$\therefore$ क्षेत्र का अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= \int_2^4 3\sqrt{x}dx$$

$$= 3\times\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_2^4 = 3\times\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_2^4 = 2\left[4^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right]$$

$= 2[8-2\sqrt{2}] = (16-4\sqrt{2})$ वर्ग इकाई उत्तर

प्रश्न 6 एवं 7 में सही उत्तर का चयन कीजिए :

6. वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ एवं रेखा $x + y = 2$ से घिरे छोटे भाग का क्षेत्रफल है :

(A) $2(\pi - 2)$ (B) $(\pi - 2)$
(C) $2\pi - 1$ (D) $2(\pi + 2)$

उत्तर—(B)

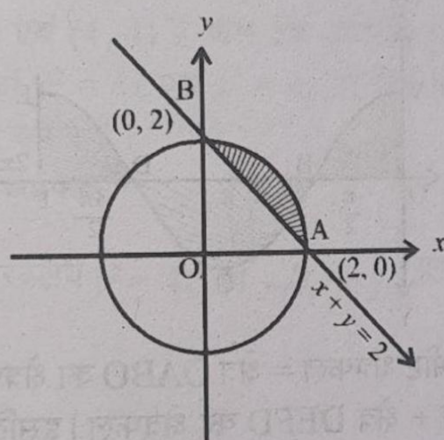
हल—दिया गया है- $x + y = 2$

या $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$

वृत्त का समी. $x^2 + y^2 = 4 = (2)^2$

वृत्त का केन्द्र (0, 0) और इसकी त्रिज्या = 2 है।

अभीष्ट क्षेत्रफल = वृत्त का प्रथम चतुर्थांश का क्षेत्रफल − ΔOAB का क्षेत्रफल



$$= \int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx - \int_0^2 (2 - x)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x\sqrt{4 - x^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^2 - \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)_0^2$$

$$= \left[\{0 + 2\sin^{-1}(1)\} - \{0 + 0\}\right] - \left[\left(4 - \frac{4}{2}\right) - (0 - 0)\right]$$

$$= 2 \times \frac{\pi}{2} - 2$$

$= \pi - 2$ वर्ग इकाई

NFVGBN

4. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

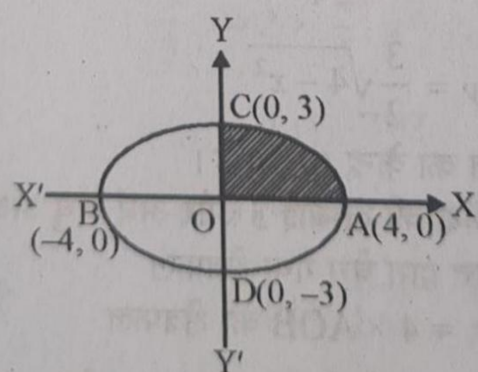
हल— दिया गया समीकरण $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ एक दीर्घवृत्त का समीकरण है। यह दोनों अक्षों के सापेक्ष सममित है क्योंकि समीकरण में x तथा y की समघात है।

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

$$\therefore \quad \frac{y^2}{9}=1-\frac{x^2}{16}=\frac{16-x^2}{16}$$

$$\text{या} \quad \frac{y}{3}=\sqrt{\frac{16-x^2}{16}}=\frac{\sqrt{16-x^2}}{4}$$

$$\therefore \quad y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$$



दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ का क्षेत्रफल = 4 × OAC का क्षेत्रफल

[∵ दीर्घवृत्त दोनों अक्षों के प्रति सममित है।]

$$=4\int_0^4 \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$$

$$=3\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$$

5. वक्र $y^2 = 4ax$, रेखा $y = 2a$ एवं y-अक्ष के मध्य क्षेत्र का क्षेत्रफल है—

(A) $\frac{2a^2}{3}$ वर्ग इकाई (B) $\frac{a^2}{3}$ वर्ग इकाई

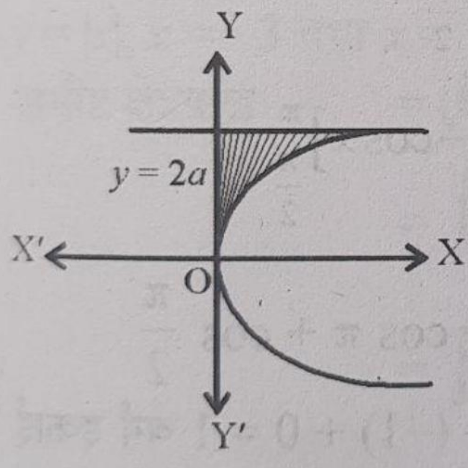
(C) $2a^2$ वर्ग इकाई (D) $\frac{4a^2}{3}$ वर्ग इकाई

उत्तर—(A)

हल—वक्र $y^2 = 4ax$ ....(1)

$y = 2a$ ....(2)

अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_0^{2a} x\,dy$



$$= \int_0^{2a} x\,dy = \int_0^{2a} \frac{y^2}{4a}\,dy$$

$$= \frac{1}{4a}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{2a}$$

∴ अभीष्ट क्षेत्रफल $= \frac{1}{12a}[8a^3 - 0] = \frac{8a^3}{12a}$

$$= \frac{2a^2}{3} \text{ वर्ग इकाई}$$

अतः सही विकल्प (A) है।

2. वक्र $y = \sqrt{x}$ तथा $y = x$ से परिबद्ध क्षेत्रफल है—

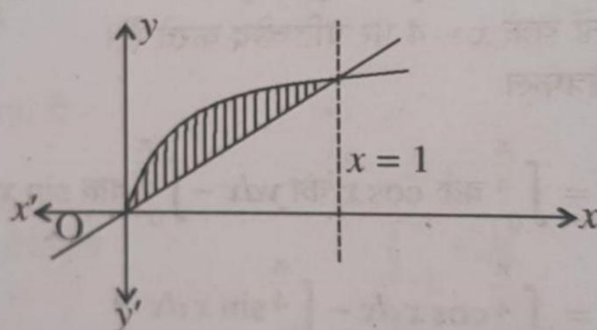
(A) 1 वर्ग इकाई (B) $\frac{1}{9}$ वर्ग इकाई

(C) $\frac{1}{6}$ वर्ग इकाई (D) $\frac{2}{3}$ वर्ग इकाई

उत्तर—(C)

हल—$y^2 = x$ और $y = x$ को हल करने पर प्रतिच्छेद बिन्दु में x के मान होंगे

$x = 0, 1$



अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_0^1 \sqrt{x}\, dx - \int_0^1 x\, dx$

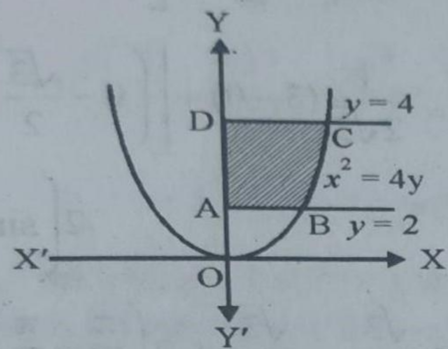
$$= \left[\frac{2}{3} x^{3/2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$$

$= \frac{1}{6}$ वर्ग इकाई

अतः सही विकल्प (C) है।

3. प्रथम चतुर्थांश में $x^2 = 4y, y = 2, y = 4$ एवं y-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल— वक्र $x^2 = 4y$ एक परवलय है जिसका शीर्ष (0, 0) है। अक्ष y-अक्ष तथा यह y-अक्ष के सापेक्ष सममित है। क्षेत्र जो y-अक्ष $y = 2, y = 4$ तथा वक्र $x^2 = 4y$; या $x = 2\sqrt{y}$ से घिरा है।



क्षेत्र का अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= \int_2^4 x\,dy = \int_2^4 2\sqrt{y}\,dy = 2\int_2^4 \sqrt{y}\,dx$$

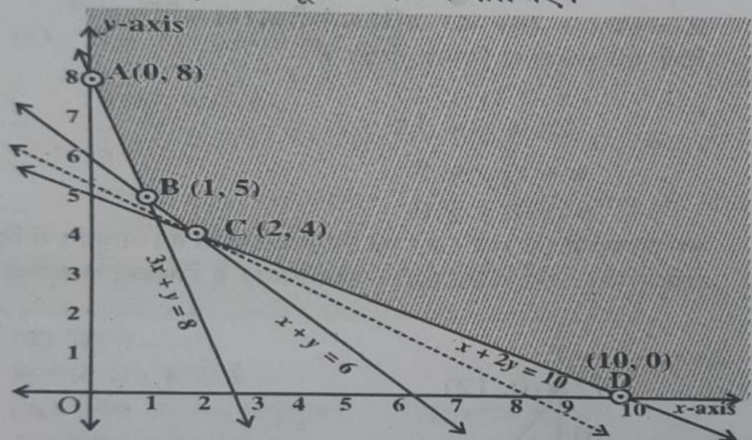
$$= 2\left[\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_2^4 = 2 \times \frac{2}{3}\left[4^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{4}{3}(8 - 2\sqrt{2})$$

2. आलेखीय विधि द्वारा निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए।

निम्न व्यवरोधों के अन्तर्गत

$$x + 2y \geq 10$$
$$x + y \geq 6$$
$$3x + y \geq 8$$
$$x, y \geq 0$$

$z = 3x + 5y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए।



हल– यहाँ पर $Z = 3x + 5y$ ....(i)

और निम्न व्यवरोधों के अन्तर्गत

$x + 2y \geq 10$ ....(ii)

$x + y \geq 6$ ....(iii)

$3x + y \geq 8$ ....(iv)

$x \geq 0$ ....(v)

$y \geq 0$ ....(vi)

सभी असमिकाओं को ग्राफ पेपर पर आलेखित करने पर इस समस्या का सुसंगत क्षेत्र ABCD है जिसके निर्देशांक निम्न प्रकार से हैं A (0, 8), B(1, 5), C (2, 4) तथा D (10, 0) अब इन बिन्दुओं पर Z का मान निम्नांकित सारणी के अनुसार ज्ञात करेंगे।

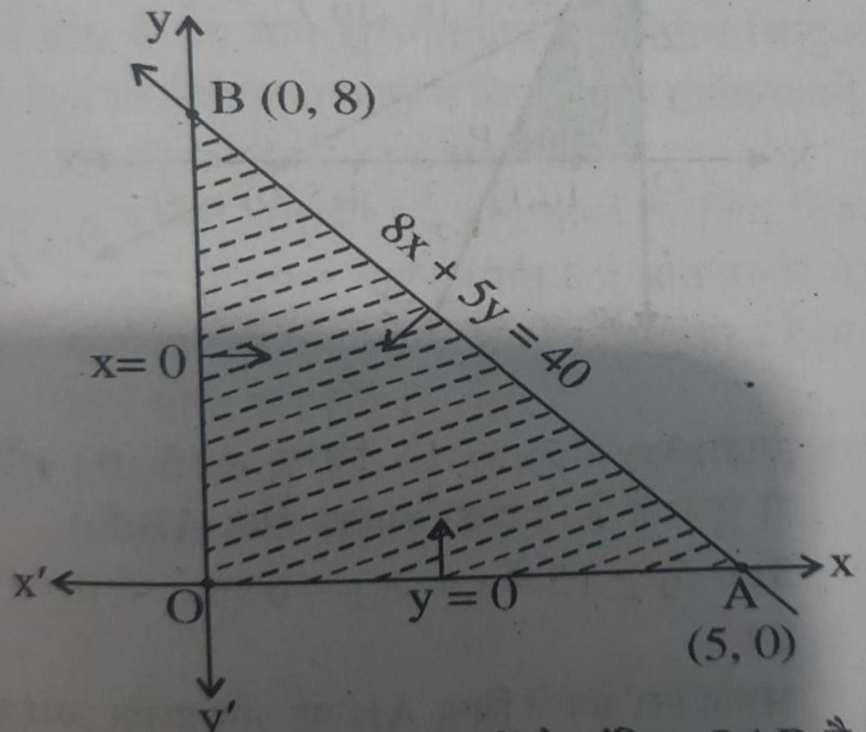
कोनीय बिन्दु	Z के संगतमान $Z = 3x + 5y$	
A(0, 8)	40	
B (1, 5)	28	
C (2, 4)	26	← न्यूनतम
D(10, 0)	30	

6. निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत सुसंगत हल क्षेत्र दर्शाइए—

$8x + 5y \le 40, \; x \ge 0, \; y \ge 0.$

हल—
$$8x + 5y = 40 \quad \text{....(1)}$$
$$x = 0, \; y = 0 \quad \text{....(2)}$$

समीकरण (1) में $x = 0$, $y = 8$ एवं $y = 0$, $x = 5$ अर्थात् (0, 8) एवं (5, 0)



अतः अभीष्ट सुसंगत क्षेत्र चित्र में रेखांकित OAB है। उत्तर

7.

उदाहरण 1. आलेख द्वारा निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए।

निम्न व्यवरोधों के अंतर्गत

$x + y \leq 50$ ....(1)

$3x + y \leq 90$ ....(2)

$x \geq 0, y \geq 0$ ....(3)

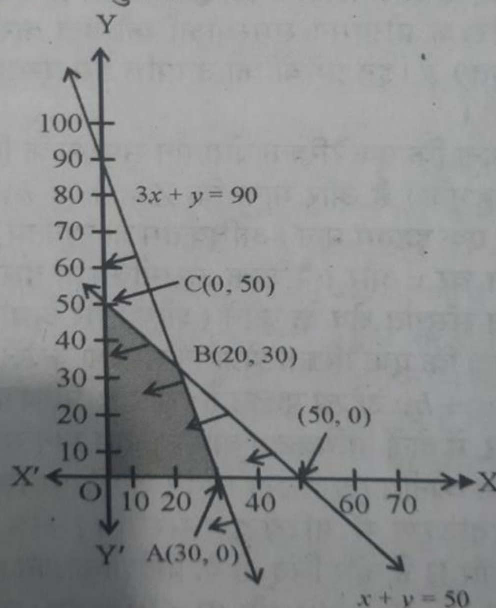
$z = 4x + y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।

(NCERT)

हल—प्रश्नानुसार $z = 4x + y$, अवरोध है :

$$x + y \leq 50, 3x + y \leq 90, x \geq 0, y \geq 0$$

चित्र में छायांकित क्षेत्र (1) से (3) के व्यवरोधों के निकाय के द्वारा निर्धारित सुसंगत क्षेत्र है। हम अवलोकन करते हैं कि सुसंगत क्षेत्र OABC परिबद्ध है। इसलिए हम Z का अधिकतम मान ज्ञात करने के लिए कोनीय बिंदु विधि का उपयोग करेंगे।



कोनीय बिंदु	Z के संगत मान
(0, 0)	$Z = 4x + y = 4 \times 0 + 0 = 0$
(30, 0)	$Z = 4x + y = 4 \times 30 + 0 = 120 \leftarrow$ अधिकतम
(20, 30)	$Z = 4x + y = 4 \times 20 + 30 = 110$
(0, 50)	$Z = 4x + y = 4 \times 0 + 50 = 50$

कोनीय बिंदुओं O, A, B और C के निर्देशांक क्रमशः (0, 0), (30, 0), (20, 30) और (0, 50) हैं।

3. यदि एक रेखा के दिक्-अनुपात – 18, 12, – 4 हैं तो इसकी दिक्-कोसाइन क्या हैं?

हल— माना कि a, b, c दिक्-अनुपात हों तो

यहाँ $a = -18, b = 12, c = -4$

$$\therefore \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{(-18)^2+12^2+(-4)^2}$$

$$= \sqrt{324+144+16} = \sqrt{484} = 22$$

अतः दिक्-कोसाइन =

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{-18}{22} = \frac{-9}{11}$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{12}{22} = \frac{6}{11}$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{-4}{22} = \frac{-2}{11}$$

⇒अतः रेखा के दिक्-कोसाइन

$$= \frac{-9}{11}, \frac{6}{11}, \frac{-2}{11}$$ **उत्तर**

4. बिन्दु (1, 2, 3) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो सदिश $3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ के समान्तर है।

हल— स्थिति बिन्दु $A(\vec{a})$ से गुजरने वाली रेखा P जो सदिश $(\vec{b})$ के समान्तर हो, उसका समीकरण

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$$

यहाँ पर $\vec{a} = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$

और $\vec{b} = 3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$

अभीष्ट रेखा AP का समीकरण

$$\vec{r} = (\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}) + \lambda(3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k})$$

जहाँ λ एक वास्तविक संख्या है। उत्तर

बिन्दुओं (3, – 2, – 5) और (3, – 2, 6) से गुजरने वाली रेखा का सदिश तथा कार्तीय रूपों में समीकरण को ज्ञात कीजिए।

–(i) रेखा बिन्दु A(3, – 2, – 5) और B(3, – 2, 6) से गुजरती है

$$\therefore \quad \vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k}$$

AB के दिक्–अनुपात $= x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$

या $3 - 3, -2 + 2, 6 + 5$

या 0, 0, 11 हैं।

$$\therefore \quad \vec{b} = 0.\hat{i} + 0.\hat{j} + 11\hat{k} = 11\hat{k}$$

AB का सदिश समीकरण

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$$

$$= 3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k} + \lambda(11\hat{k})$$

या

$$\vec{r} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k} + 11\lambda\hat{k}$$ उत्तर

(ii) रेखा बिन्दु A(3, – 2, – 5) तथा (3, – 2, 6) से गुजरती है

अत: इसके दिक्–अनुपात = 3 – 3, – 2 + 2, 6 + 5 या 0, 0, 11

∴ रेखा AB का कार्तीय समीकरण

$$\frac{x-3}{0} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+5}{11}$$ उत्तर

13. दिखाइए कि रेखाएँ $\frac{x-5}{7}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z}{1}$ और $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ परस्पर लम्ब हैं।

हल—पहली रेखा $\frac{x-5}{7}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z}{1}$ दिक्-अनुपात = 7, – 5, 1

तथा दूसरी रेखा $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ के दिक्-अनुपात = 1, 2, 3

अर्थात् माना कि $a_1 = 7, b_1 = -5, c_1 = 1$

तथा $a_2 = 1, b_2 = 2, c_2 = 3$

अतः दी हुई रेखाएँ परस्पर लम्ब होंगी यदि

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

अर्थात् $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 7 \times 1 + (-5) \times 2 + 1 \times 3$

$$= 7 - 10 + 3 = 0$$

अतः दी हुई रेखाएँ परस्पर लम्ब हैं। उत्तर

समतल $2x+y-z=5$ द्वारा काटे गए अन्तःखण्डों को ज्ञात कीजिए।

—समतल का समीकरण $\quad 2x + y - z = 5$

5 से भाग देने पर $\quad \frac{2}{5}x + \frac{y}{5} - \frac{z}{5} = 1$

या $\quad \frac{x}{\frac{5}{2}} + \frac{y}{5} + \frac{z}{-5} = 1$

अन्तःखण्ड रूप में समतल का समीकरण

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$ होता है।

अतः समतल द्वारा काटे गए अन्तःखण्ड $\frac{5}{2}, 5, -5$ हैं।

10. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ बिन्दुओं (5, 1, 6) और (3, 4, 1) को मिलाने वाली रेखा YZ-तल को काटती है।

हल—हम जानते हैं कि बिन्दु (x_1, y_1, z_1) और (x_2, y_2, z_2) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

(5, 1, 6) और (3, 4, 1) बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा का समीकरण

$$\frac{x-5}{3-5}=\frac{y-1}{4-1}=\frac{z-6}{1-6}$$

या $$\frac{x-5}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-6}{-5}$$

या $$\frac{x-5}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-6}{5}=\lambda$$

(मान लिया)

इस रेखा पर किसी बिन्दु का निर्देशांक

$$(5+2\lambda, 1-3\lambda, 6+5\lambda) \qquad ....(1)$$

यह बिन्दु YZ-तल अर्थात् $x = 0$ पर स्थित है।

$$5+2\lambda=0 \therefore \lambda=-\frac{5}{2}$$

λ का मान (1) में रखने पर

$$5+2\lambda=0, x=0$$

$$y=1-3\lambda=1-3\left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$=1+\frac{15}{2}=\frac{17}{2}$$

तथा $$z=6+5\lambda=6+5\left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$=6-\frac{25}{2}=-\frac{13}{2}$$

$\therefore$ अभीष्ट बिन्दु $\left(0, \frac{17}{2}, -\frac{13}{2}\right)$ उत्तर

22. दो समतलों $2x + 3y + 4z = 4$ और $4x + 6y + 8z = 12$ के बीच की दूरी है :

(A) 2 इकाई (B) 4 इकाई

(C) 8 इकाई (D) $\frac{2}{\sqrt{29}}$ इकाई

उत्तर—(D)

हल—
$$2x + 3y + 4z = 4 \quad .....(1)$$
$$4x + 6y + 8z = 12$$
या
$$2x + 3y + 4z = 6 \quad .....(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) के समतल आपस में समान्तर हैं इसलिये समतलों के मध्य की दूरी

$$= \left| \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{4 - 6}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}} \right| = \frac{2}{\sqrt{4 + 9 + 16}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

अत: सही विकल्प (D) है।

☞ उदाहरण 1. दिये गये रेखा-युग्म

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

और $\vec{r} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + \mu(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए। **(NCERT)**

हल—मान लीजिए $\vec{b}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ और $\vec{b}_2 = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$

दोनों रेखाओं के मध्य कोण θ है, इसलिए

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}_1 . \vec{b}_2}{|\vec{b}_1|\,|\vec{b}_2|}\right| = \left|\frac{(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}).(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{9+4+36}}\right|$$

$$= \left|\frac{3+4+12}{3\times 7}\right| = \frac{19}{21}$$

अतः $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$

☞

हल

4. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से +3 इकाई की दूरी पर हो तथा इसके अभिलम्ब के दिक्-अनुपात 12, – 4, 3 हैं।

हल— समतल के अभिलम्ब के दिक्-अनुपात 12, – 4, 3 हैं अत: दिक्-कोसाइन

$$l = \frac{12}{\sqrt{144+16+9}},\ m = \frac{-4}{\sqrt{144+16+9}},$$

$$n = \frac{3}{\sqrt{144+16+9}}$$

$\Rightarrow\ l = \frac{12}{13},\ m = \frac{-4}{13},\ n = \frac{3}{13}$ एवं $p = 3$

अत: अभिलम्ब रूप में समतल का समीकरण

$$lx + my + nz = p$$

$$\frac{12}{13}x + \left(\frac{-4}{13}\right)y + \frac{3}{13}z = 3$$

$$\Rightarrow\quad 12x - 4y + 3z = 39$$