

कार्यालय, मुख्य ब्लॉक शिक्षा अधिकारी
ब्लॉक-भीण्डर एवं वल्लभनगर
(उदयपुर)



प्रेरणा

प्रश्न बैंक

(एक नवाचारी पहल)

गणित

कक्षा- 10

बोर्ड परीक्षा परिणाम में गुणात्मक एवं
संख्यात्मक उन्नयन
हेतु अभिनव कार्ययोजना के तहत निर्मित



—मुख्य संरक्षक—

श्री गौरव अग्रवाल IAS
निदेशक, माध्यमिक शिक्षा,
राजस्थान

एंजिलिका पलात
संयुक्त निदेशक
स्कूल शिक्षा, उदयपुर

पुष्पेन्द्र कुमार शर्मा
मुख्य जिला शिक्षा अधिकारी
उदयपुर

—संरक्षक—

मोनिका जाखड़
उपखण्ड अधिकारी
भीण्डर

गोविन्द सिंह
उपखण्ड अधिकारी
वल्लभनगर

—मार्गदर्शक—

महेन्द्र कुमार जैन
मुख्य ब्लॉक शिक्षा अधिकारी
भीण्डर

अनिल कुमार पोरवाल
मुख्य ब्लॉक शिक्षा अधिकारी
वल्लभनगर

भैरूलाल सालवी
अति. मुख्य ब्लॉक शिक्षा अधिकारी
भीण्डर

रमेश खटीक
अति. मुख्य ब्लॉक शिक्षा अधिकारी
भीण्डर

गोपाल लाल मेनारिया
अति. मुख्य ब्लॉक शिक्षा अधिकारी
वल्लभनगर

—संयोजक—

घीसू लाल दक
प्रधानाचार्य राजकीय उच्च माध्यमिक विद्यालय दरोली

—कार्यकारी दल—

1. ओम प्रकाश मेहता, व.अ., राउमावि महाराज की खेड़ी
2. स्नेहलता कोठारी, प्राध्यापक, विद्या भवन आर.आई. संस्थान, उदयपुर

प्रश्न-पत्र की योजना

कक्षा – 10

विषय – गणित 09

अवधि – 3 घण्टे 15 मिनट

पूर्णांक – 80

1. उद्देश्य हेतु अंकभार –

क्र.सं.	उद्देश्य	अंकभार	प्रतिशत
1.	ज्ञान	20	25.00
2.	अवबोध	16	20.00
3.	अभिव्यक्ति	24	30.00
4.	मौलिकता	20	25.00
योग		80	100 %

2. प्रश्नों के प्रकारवार अंकभार –

क्र. सं.	प्रश्नों का प्रकार	प्रश्नों की संख्या	अंक प्रति प्रश्न	कुल अंक प्रतिशत	प्रतिशत प्रश्नों का	संभावित समय
1.	वस्तुनिष्ठ	18	1	22.50	36.00	45
2.	अतिलघूत्तरात्मक	12	1	15.00	24.00	35
3.	लघूत्तरात्मक	13	2	32.50	26.00	45
4.	दीर्घउत्तरीय प्रश्न	04	3	15.00	08.00	35
5.	निबंधात्मक	03	4	15.00	06.00	35
योग		50		100	100	195

3. विषय वस्तु का अंकभार –

क्र.सं.	विषय वस्तु	अंकभार	प्रतिशत
1	वास्तविक संख्याएँ	4	05.00
2	बहुपद	3	03.75
3	दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म	6	07.50
4	द्विघात समीकरण	4	05.00
5	समांतर श्रेणीया	5	06.25
6	त्रिभुज	4	05.00
7	निर्देशांक ज्यामिति	6	07.50
8	त्रिकोणमिति का परिचय	8	10.00
9	त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग	4	05.00
10	वृत्त	5	06.25
11	रचनाएँ	6	07.50
12	वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल	4	05.00
13	प्रक्षीय क्षेत्रफल और आयतन	6	07.50
14	सांख्यिकी	11	13.75
15	प्रायिकता	4	05.00

प्रश्न-पत्र ब्लू प्रिन्ट

कक्षा – 10

विषय :- गणित 09

पूर्णांक – 80

क्र. सं.	उद्देश्य इकाई/उप इकाई	ज्ञान					अवलोकन					ज्ञानोपयोग/अभिव्यक्ति					कौशल/भौतिकता					योग			
		वस्तुनिष्ठ	बि.लघु	लघु उत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	वस्तुनिष्ठ	बि.लघु	लघु उत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	वस्तुनिष्ठ	बि.लघु	लघु उत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	वस्तुनिष्ठ	बि.लघु	लघु उत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक				
1	वास्तविक संख्याएँ	1(1)		2(1)														1(1)						4(4)	
2	बहुपद	1(1)						2(1)																	3(2)
3	दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म					4(1)	1(1)	1(1)																	6(3)
4	द्विघात समीकरण			2(1)			1(1)	1(1)																	4(3)
5	समांतर श्रेणीया				3(1)						1(1)	1(1)													5(3)
6	त्रिभुज										1(1)	1(1)	2(1)												4(3)
7	निर्देशांक ज्यामिति	1(1)						2(1)	3(1)									4(1)	1(2)						6(3)
8	त्रिकोणमिति का परिचय		1(2)															4(1)	1(2)						8(5)
9	त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग										1(1)									1(1)	2(1)				4(3)
10	वृत्त						1(1)	1(1)															3(1)		5(3)
11	रचनाएँ						1(1)													1(1)	2(2)				6(4)
12	वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल			2(1)							1(1)														4(3)
13	प्रक्षीय क्षेत्रफल और आयतन										1(2)		2(2)												6(3)
14	सांख्यिकी		1(2)										2(1)	3(1)										4(1)	11(5)
15	प्रायिकता							2(1)			1(1)							1(1)							4(3)
		5(5)	2(2)	6(3)	3(1)	4(1)	4(4)	3(3)	6(3)	3(1)	5(5)	4(4)	8(4)	3(1)	4(1)	4(4)	3(3)	6(3)	3(1)	4(1)					80(50)

विकल्पों की योजना :- प्र.सं. 21, 22, 23 में एक आंतरिक विकल्प है।

नोट:- कोष्ठक में बाहर की संख्या अंकों की तथा भीतर प्रश्नों की द्योतक है।

माध्यमिक शिक्षा बोर्ड राजस्थान, अजमेर
माध्यमिक परीक्षा – 2023
मॉडल प्रश्न पत्र

विषय—गणित
कक्षा—10

समय— 3 घण्टे 15 मिनट

पूर्णांक—80

परीक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश :

General Instruction to the Examinees :

- I. परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्नपत्र पर नामांक अनिवार्यतः लिखें।
Candidate must write first his/her Roll No. on the question paper compulsorily.
- II. सभी प्रश्न करने अनिवार्य हैं।
All the questions are compulsory.
- III. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तरपुस्तिका में ही लिखें।
Write the answer to each question in the given answer book only.
- IV. जिन प्रश्नों में आन्तरिक खण्ड है, उन सभी के उत्तर एक साथ ही लिखें।
For questions having more than one part the answers to those parts are to be written together in continuity.
- V. प्रश्न पत्र के हिन्दी व अंग्रेजी रूपान्तर में किसी प्रकार की त्रुटि/अंतर/विरोधाभास होने पर हिन्दी भाषा के प्रश्न को ही सही मानें।
If there is any error/difference/contradiction in Hindi & English versions of the question paper, the question of Hindi version should be treated valid.

1. वास्तविक संख्याएँ

1. 12 और 15 क लसप और मसप क्या होगा ?
अ. 60 और 3 ब. 24 और 6
स. 12 और 30 द. इनमें से कोई नहीं
2. बहुपद $3x^2 + 4x - 2$ शून्यकों की संख्या होगी ?
अ. 1 ब. 2 स. 0 द. इनमें से कोई नहीं
3. मूल बिन्दु के निर्देशांक होते हैं ?
अ. (1, 2) ब. (1, 2) स. (-1, 1) द. (0, 0)
4. यदि $2x + y = 6$ हो तो इसको संतुष्ट करने वाला युग्म है।
अ. (1, 2) ब. (2, 1) स. (2, 2) द. (1, 1)
5. समीकरण के मूल वास्तविक नहीं होंगे यदि –
अ. $b^2 - 4ac < 0$ ब. $b^2 - 4ac > 0$
स. $b^2 - 4ac = 0$ द. इनमें से कोई नहीं
6. एक समान्तर श्रेणी 3,7,11,15 के लिये सार्वअन्ता होगा।
अ. 1 ब. 2 स. 3 द. 4
7. $2\sin 45^\circ \cos 45^\circ$ का मान होगा?
अ. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ब. 2 स. 1 द. 0
8. एक वृत्त की कितनी स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं?
अ. एक ब. अनन्त स. तीन द. ज्ञात नहीं
9. वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करने का सूत्र है—
अ. $2\pi r$ ब. $\frac{\pi r^2}{180}$ स. πr^2 द. इनमें से कोई नहीं
10. यदि एक बेलन की उँचाई 11 सेमी तथा उसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 968 सेमी² है तो बेलन की त्रिज्या होगी।
अ. 10 सेमी. ब. 11 सेमी स. 12 सेमी द. 14 सेमी

11 बंटन 7, 4, 5, 3, 4, 3, 4, 1, 2 का बहुलक है।

अ. 7. ब. 4 स. 3 द. 2

12 एक पासे को एक बार फेंका जाता है। अभाज्य संख्या को प्राप्त करने की प्रायिकता है।

अ. $\frac{1}{2}$ ब. $\frac{2}{3}$ स. 0 द. 1

1	2	3	4	5	6
अ	ब	द	स	ट	छ
7	8	9	10	11	12
स	ब	स	द	ब	ट

Q.2

1. $3 + 2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। परिमेय/अपरिमेय

उ. अपरिमेय

2. सभी वृत्त ----- होते हैं। सर्वांगसम/समरूप

उ. समरूप

3. $\tan 30^\circ \tan 60^\circ$ का मान ----- होगा।

उ. 1

4. वृत्त की स्पर्श रेखा और त्रिज्या के बीच ----- का कोण बनता है।

उ. समकोण

5. वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य ज्ञात करने का सूत्र $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$ है।

उ. $\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

6. किसी असम्भव घटना के होने की प्रायिकता ----- है।

उ. शून्य

Q.3

(i) दो चर वाले समीकरण निकाय का हल अद्वितीय होने की शर्त लिखिए। 1

यदि रैखिक समीकरण $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ एक रैखिक समीकरण निकाय को प्रदर्शित करते हैं तो $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ अद्वितीय हल होने की शर्त है।

(ii) द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल ज्ञात करने का श्री धराचार्य सूत्र लिखिए ? 1

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(iii) समान्तर श्रेणी 2, 5, 8, 11 के 12 पदों का योग ज्ञात करो ? 1

$$a = 2, d = 3, n = 12$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)d]$$

$$S_{12} = \frac{12}{2} [2 \times 2 + (12 - 1)3]$$

$$S_n = 6(4 + 33)$$

$$= 6 \times 37 = 222$$

(iv) दो समरूप त्रिभुजों की भुजाओं का अनुपात 4 : 9 हो तो इन दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए। 1

दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात = संगत भुजाओं के अनुपात का वर्ग

$$\left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$$

(v) $\frac{\sec 40^\circ}{\operatorname{cosec} 50^\circ} - \frac{\sec 50^\circ}{\operatorname{cosec} 40^\circ}$ का मान ज्ञात कीजिए ?

$$\frac{\sec (90 - 50)}{\operatorname{cosec} 50} - \frac{\sec (90 - 40)}{\operatorname{cosec} 40}$$

$$= \frac{\operatorname{cosec} 50}{\operatorname{cosec} 50} - \frac{\operatorname{cosec} 40}{\operatorname{cosec} 40}$$

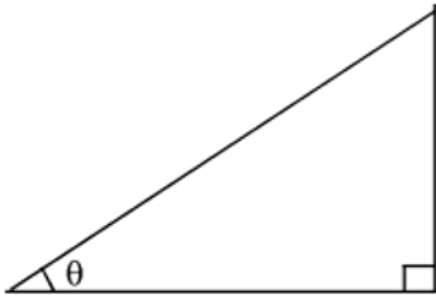
$$= 1 - 1 = 0$$

(vi) $9\sec^2\theta - 9\tan^2\theta$ का मान ज्ञात करो ?

$$= 9(\sec^2\theta - \tan^2\theta)$$

$$= 9 \times 1 = 9$$

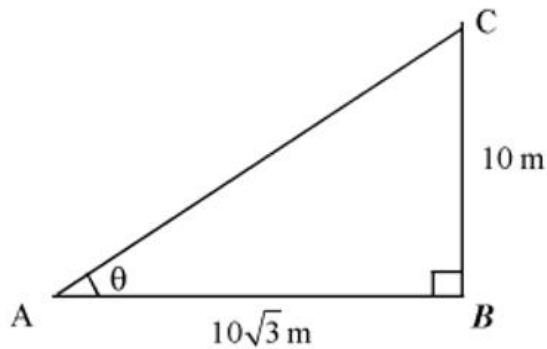
(vii) एक समय एक मीनार की छाया उसकी ऊंचाई के बराबर हो जाती है, तो उन्नयन कोण ज्ञात कीजिए ? 1



$$\tan \theta = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{AB} = 1$$

$$\theta = 45^\circ$$

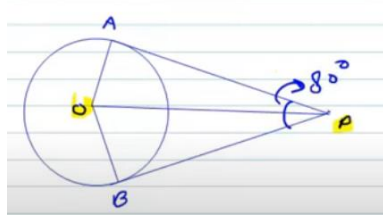
(viii) दी गई आकृति में कोण θ का मान ज्ञात कीजिए ?



$$\tan \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{10}{10\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta = 30^\circ$$

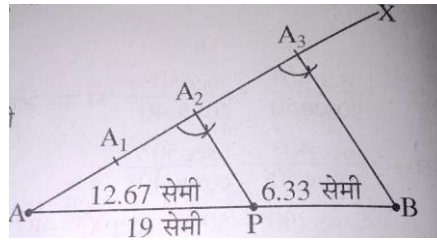
(ix) यदि एक बिन्दु P से O केन्द्र वाले किसी वृत्त पर PA, PB स्पर्श रेखाएं परस्पर 80° के कोण पर झुकी हो तो $\angle AOB$ का मान ज्ञात करो ? 1



$$AOB = 180 - 80 = 100$$

(x) 19 सेमी लम्बा एक रेखाखण्ड खींचिए और इसे 2 : 1 के अनुपात में विभाजित कीजिए ? दोनों भाग की माप लिखो।

1

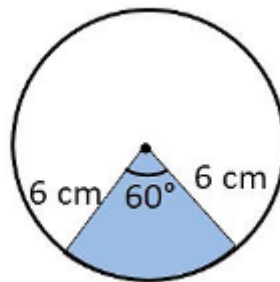


$$\frac{AP}{PB} = \frac{2}{1}$$

$$AP = 12.67 \text{ cm}, PB = 6.33 \text{ cm}$$

(xi) 6 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के एक त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कोण 60° है ?

1



त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2 \\ &= \frac{60}{360} \times \frac{22}{7} \times (6)^2 \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{22}{7} \times 36 \end{aligned}$$

$$= \frac{6 \times 22}{7}$$

$$= \frac{132}{7} \text{ cm}^2$$

(xii) एक बक्से में 3 नीली, 2 सफेद और 4 लाल गेंद हैं। इस बक्से में से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है तो इसकी क्या प्रायिकता है कि निकाली गई गेंद नीली है ? 1

$$\text{सभी सम्भव परिणामों की संख्या} = 3+2+4 = 9$$

$$\text{निकाली गई गेंद नीली होने की घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या} = 3$$

$$\text{अभीष्ट प्रायिकता} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Section – B

4. दो संख्याओं 616 और 32 का महत्तम समापवर्तक (HCF) ज्ञात कीजिए। 2

$$616 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 11 = 2^3 \times 7 \times 11$$

$$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

$$\text{HCF} = 2^3 = 8$$

5. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यक 4 तथा 1 हैं ? 2

$$\alpha = 4, \beta = 1$$

$$\alpha + \beta = 4 + 1 = \frac{5}{1} = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = 4 \times 1 = \frac{4}{1} = \frac{c}{a}$$

यदि $a = 1$, $b = -5$ तथा $c = 4$ हो तो द्विघात बहुपद $x^2 - 5x + 4$ होगा।

6. द्विघात समीकरण $6x^2 - x - 2$ के मूल ज्ञात कीजिए।

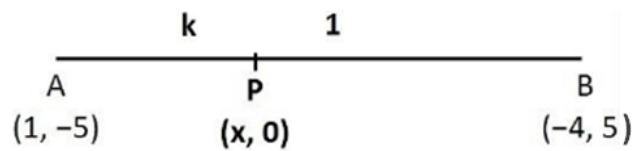
$$6x^2 - 4x + 3x - 2 = 0$$

$$2x(3x - 2) + 1(3x - 2) = 0$$

$$(2x + 1)(3x - 2) = 0$$

$$\begin{array}{l|l} 2x + 1 = 0 & 3x - 2 = 0 \\ 2x = -1 & 3x = 2 \\ x = \frac{-1}{2} & x = \frac{2}{3} \end{array}$$

7. बिन्दुओं $(1, -5)$ और $(-4, 5)$ को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को x - अक्ष किस अनुपात में विभाजित करता है, ज्ञात कीजिए?



$$(x, 0) = \left(\frac{k(-4) + 1}{k + 1}, \frac{k(5) + (-5)}{k + 1} \right) \dots (i)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{k(5) - 5}{k + 1}$$

$$\Rightarrow 5k - 5 = 0$$

$$\Rightarrow 5k = 5$$

$$\Rightarrow k = 1$$

अभीष्ट अनुपात = 1:1

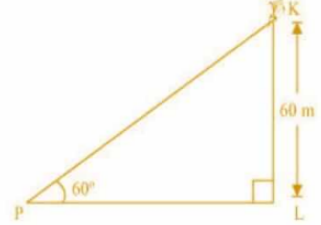
8. भूमि से 60 m की ऊँचाई पर एक पतंग उड़ रही है। पतंग में लगी डोरी को अस्थायी रूप से भूमि के एक बिन्दु से बाँध दिया गया है। भूमि के साथ डोरी का झुकाव 60° है। यह मानकर कि डोरी में कोई ढाल नहीं है, डोरी की लम्बाई ज्ञात कीजिए। 2

माना K पतंग है और P वह बिंदु है जिससे पतंग में लगी डोरी को अस्थायी रूप से बाँध दिया गया है। ΔKLP में,

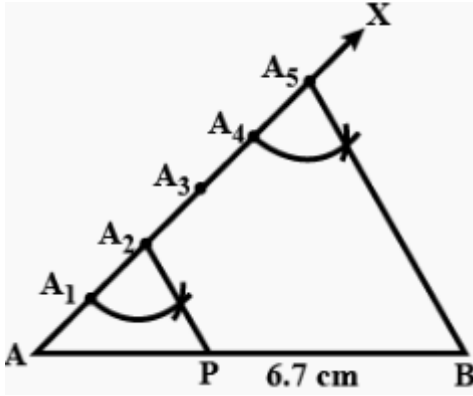
$$\frac{KL}{KP} = \sin 60^\circ \Rightarrow \frac{60}{KP} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{120}{\sqrt{3}} = \frac{120\sqrt{3}}{3} = 40\sqrt{3}$$

इसलिए, डोरी की लंबाई $40\sqrt{3}$ m है।



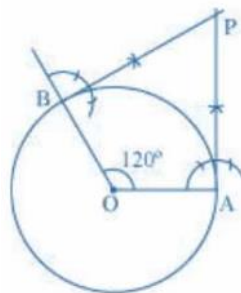
9. 6.7 सेमी लम्बाई का एक रेखाखण्ड खींचकर उसका 2 : 3 में आन्तरिक विभाजन कीजिए ? 2



10. 5 सेमी त्रिज्या के एक वृत्त पर ऐसी दो स्पर्श रेखाएँ खींचिए, जो परस्पर के 60° कोण पर झुकी हो। 2

रचना के चरण

- किसी बिंदु O को केंद्र मान कर तथा 5 cm त्रिज्या लेकर एक वृत्त बनाया।
- वृत्त पर एक बिंदु A लिया और OA को मिलाया। बिंदु A से OA पर लंब एक रेखा खींची।
- रेखा OB खींची जो OA से 120° ($180^\circ - 60^\circ$) पर है।
- बिंदु B से OB पर लंब एक रेखा खींची। जो OA पर खींचे गए लंब को P पर मिलता है।
- PA और PB अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं जो 60° के कोण पर झुकी हैं।



11. यदि दो त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हो तो सिद्ध कीजिए कि वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं ? 2

माना, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, इसलिए

$$\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DEF)} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AC^2}{DF^2}$$

दिया है, $ar(\Delta ABC) = ar(\Delta DEF)$

$$\text{इसलिए, } \frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DEF)} = 1$$

$$\text{समीकरण (1) से, } \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = 1$$

$$\Rightarrow AB = DE, BC = EF \text{ और } AC = DF$$

$$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF \quad [\text{SSS सर्वांगसम प्रमेय}]$$

12. एक घड़ी के मिनट की सुई जिसकी लम्बाई 14 सेमी है। इस सुई के द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ? 2



हम जानते हैं कि मिनट की सुई 1 घंटे में 360° का कोण बनाती है।

$$\text{अतः, 5 मिनट में बनाया गया कोण} = \frac{360^\circ}{60} \times 5 = 30^\circ$$

इसप्रकार, इस सुई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल = 30° के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

$$= \frac{30^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$$

$$= \frac{1}{12} \times \pi (14)^2$$

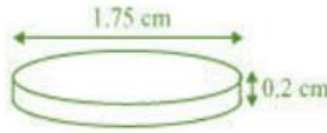
$$= \frac{1}{12} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14$$

$$= \frac{154}{3} \text{ cm}^2$$

13. त्रिज्या 4.2 सेमी वाले धातु के एक गोले को पिघलाकर त्रिज्या 6 सेमी वाले एक बेलन के रूप में ढाला जाता है। बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए ? 2

धातु के गोले की त्रिज्या (r_1) = 4.2 cm
 बेलन की त्रिज्या (r_2) = 4.2 cm
 माना बेलन की ऊँचाई = h
 प्रश्नानुसार, गोले का आयतन = बेलन का आयतन
 $\Rightarrow \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \pi r_2^2 h \quad \Rightarrow \frac{4}{3}\pi(4.2)^3 = \pi(6)^2 h$
 $\Rightarrow h = \frac{4}{3} \times \frac{4.2 \times 4.2 \times 4.2}{36} = 1.4 \times 1.4 \times 1.4 = 2.74 \text{ cm}$
 अतः, बेलन की ऊँचाई 2.74 cm है।

14. विमाओं 5.5 cm × 10 cm × 3.5 cm वाला एक घनाभ बनाने के लिए 1.75 सेमी व्यास 2 एमएम मोटाई वाले कितने चाँदी के सिक्कों को पिघलाना पड़ेगा ? 2



चाँदी के सिक्कों की त्रिज्या (r) = $1.75/2 = 0.875 \text{ cm}$, चाँदी के सिक्कों की ऊँचाई (h_1) = 0.2 cm
 घनाभ की लंबाई = 5.5 cm, घनाभ की चौड़ाई = 10 cm
 घनाभ की ऊँचाई = 3.5 cm, माना चाँदी के सिक्कों की संख्या = n
 इसलिए, n × चाँदी के एक सिक्के का आयतन = घनाभ का आयतन

$$\Rightarrow n(\pi r^2 h_1) = lbh \quad \Rightarrow n \times \frac{22}{7} \times (0.875)^2 \times 0.2 = 5.5 \times 10 \times 3.5$$

$$\Rightarrow n = \frac{5.5 \times 10 \times 3.5 \times 7}{0.875 \times 0.845 \times 0.2 \times 22} \quad \Rightarrow n = 400$$

अतः, चाँदी के सिक्कों की संख्या 400 है।

15. निम्न बारम्बारता बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए ?

x	20	30	40	50	60	70	80
f	6	11	7	4	4	2	1

x	f	x X f
20	6	120
30	11	330
40	7	280
50	4	200
60	4	240
70	2	140

80	1	80
योग	35	1390

$$\text{समान्तर माध्य} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{1390}{35} = 39.71$$

16. दो खिलाड़ी A और B टेनिस का एक मैच खेलते हैं। यह ज्ञात है कि A के मैच जीतने की प्रायिकता 0.38 है। B के मैच जीतने की क्या प्रायिकता है? 2

$$A \text{ के मैच जीतने की प्रायिकता} = P(A) = 0.38$$

$$B \text{ के मैच जीतने की प्रायिकता} = P(B) = 1 - P(A) = 1 - 0.38 = 0.62$$

SECTION - C

17. A.P. : 17, 15, 13,.....के कितने पद लिए जाएँ ताकि उनका योग 81 हो? 3

$$a = 17, d = 15 - 17 = -2 \text{ तथा } S_n = 81$$

$$\therefore S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d)$$

$$81 = \frac{n}{2}[2 \times 17 + (n - 1) \times (-2)]$$

$$162 = -2n^2 + 36n$$

$$n^2 - 18n + 81 = 0$$

$$(n - 9)^2 = 0$$

$$n = 9$$

18. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (2, -2), (-2, 1) तथा (5, 2) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं। 3

$$AB^2 = (2 + 2)^2 + (-2 - 1)^2$$

$$= 16 + 9$$

$$AB^2 = 25 \text{ or, } AB = 5$$

$$BC^2 = (-2 - 5)^2 + (1 - 2)^2$$

$$= 49 + 1 = 50$$

$$BC^2 = 50 \text{ or, } BC = 5\sqrt{2}$$

$$AC^2 = (2 - 5)^2 + (-2 - 2)^2$$

$$= 9 + 16$$

$$= 25$$

$$AC^2 = 25 \text{ and } AC = 5$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$25 + 25 = 50$$

पाइथोगोरस प्रमेय के अनुसार त्रिभुज BAC एक समकोण त्रिभुज है। अतः (2,-2), (-2,1) तथा (5,2) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष है।

19. निम्नलिखित वर्गीकृत आंकड़ों का कल्पित माध्य विधि द्वारा माध्य ज्ञात कीजिए ?

वर्ग	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23	23-25
बारम्बारता	7	6	9	13	20	5	4

3

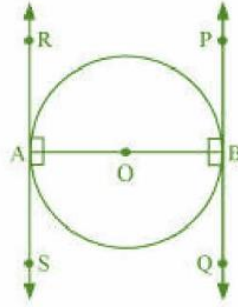
वर्ग	बारम्बारता	वर्ग चिन्ह	di = x-a	fd
11-13	7	12	-6	-42
13-15	6	14	-4	-24
15-17	9	16	-2	-18
17-19	13	18	0	0
19-21	20	20	2	40
21-23	5	22	4	20
23-25	4	24	6	24
योग	64			0

कल्पित माध्य =18

$$\text{माध्य} = a + \frac{\sum fd}{\sum f}$$

$$\text{माध्य} = 18 + \frac{0}{64} = 18$$

20. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के किसी व्यास के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएं समान्तर होती हैं? 3



माना AB व्यास है तथा PQ और RS सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ हैं।
हम जानते हैं कि त्रिज्या, स्पर्श रेखा पर लम्ब होती है।

इसलिए, $OA \perp RS$ और $OB \perp PQ$

$$\angle OAR = 90^\circ \text{ और } \angle OAS = 90^\circ$$

$$\angle OBP = 90^\circ$$

$$\angle OBQ = 90^\circ$$

उपरोक्त से हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होते हैं:

$$\angle OAR = \angle OBQ \quad [\text{एकान्तर कोण}]$$

$$\angle OAS = \angle OBP \quad [\text{एकान्तर कोण}]$$

एकान्तर कोण बराबर है तो रेखाएँ भी समान्तर होंगी।

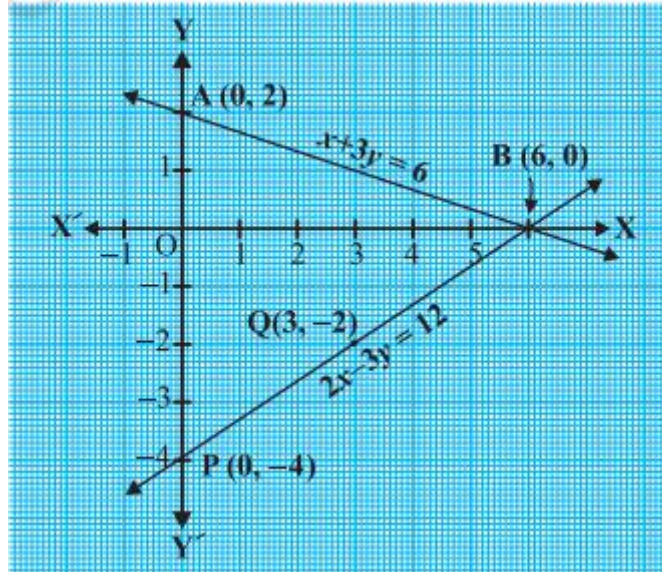
खण्ड — द

Solve the following pair of linear equations by graphical method :

$$x + 3y = 6 \quad ; \quad 2x - 3y = 12$$

x	0	6
$y = \frac{6-x}{3}$	2	0

x	0	3
$y = \frac{2x-12}{3}$	-4	-2



22. सिद्ध कीजिए कि

$$\sqrt{\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}} = \sec A + \tan A$$

$$\text{वाम पक्ष} = \sqrt{\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A} \times \frac{1 + \sin A}{1 + \sin A}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1 + \sin A)^2}{1 - \sin^2 A}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1 + \sin A)^2}{\cos^2 A}} \quad [\text{क्योंकि } 1 - \sin^2 A = \cos^2 A]$$

$$= \frac{1 + \sin A}{\cos A}$$

$$= \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$= \sec A + \tan A$$

$$= \text{दाँया पक्ष}$$

सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\cos A}{1 + \sin A} + \frac{1 + \sin A}{\cos A} = 2 \sec A$$

$$\begin{aligned} \text{वाम पक्ष} &= \frac{\cos A}{1 + \sin A} + \frac{1 + \sin A}{\cos A} \\ &= \frac{\cos^2 A + (1 + \sin A)^2}{(1 + \sin A) \cos A} \\ &= \frac{\cos^2 A + 1 + \sin^2 A + 2 \sin A}{(1 + \sin A) \cos A} \\ &= \frac{1 + 1 + 2 \sin A}{(1 + \sin A) \cos A} \quad [\text{क्योंकि } \sin^2 A + \cos^2 A = 1] \\ &= \frac{2 + 2 \sin A}{(1 + \sin A) \cos A} \\ &= \frac{2(1 + \sin A)}{(1 + \sin A) \cos A} \\ &= \frac{2}{\cos A} = 2 \sec A = \text{दाँया पक्ष} \end{aligned}$$

23. निम्नलिखित सारणी किसी अस्पताल में एक विशेष वर्ग में भर्ती हुए रोगियों की आयु को दर्शाती है—

आयु (वर्षों में)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
रोगियों की संख्या	6	11	21	23	14	5

उपर्युक्त आँकड़ों के बहुलक और माध्य ज्ञात कीजिए।

4

प्रत्येक वर्ग-अन्तराल के लिए वर्ग चिन्ह (x_i) ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करेंगे:

$$\text{वर्ग चिन्ह } x_i = \frac{\text{उपरि वर्ग सीमा} + \text{निचली वर्ग सीमा}}{2}$$

यहाँ, 30 को कल्पित माध्य (a) लेकर, d_i और $f_i d_i$ का मान निम्नलिखित से प्राप्त कर सकते हैं:

आयु (वर्षों में)	रोगियों की संख्या (f_i)	वर्गचिन्ह (x_i)	$d_i = x_i - 30$	$f_i d_i$
5 - 15	6	10	- 20	- 120
15 - 25	11	20	- 10	- 110
25 - 35	21	30	0	0
35 - 45	23	40	10	230
45 - 55	14	50	20	280
55 - 65	5	60	30	150
योग	80			430

यहाँ, सारणी से हमें निम्नलिखित मान प्राप्त होते हैं:

$$\sum f_i = 80, \sum f_i d_i = 430 \text{ और } a = 30$$

$$\text{माध्य} = a + \frac{\sum fd}{\sum f} = 30 + \left(\frac{430}{80}\right) = 30 + 5.375 = 35.375 = 35.38$$

सबसे अधिक बारंबारता 23 है जो कि वर्ग 35 - 45 में है। इसलिए

बहुलक वर्ग 35 - 45 है।
 बहुलक वर्ग की निम्न सीमा (l) = 35
 बहुलक वर्ग की बारंबारता (f_1) = 23
 वर्गमाप (h) = 10

बहुलक वर्ग से ठीक पहले आने वाले वर्ग की बारंबारता (f_0) = 21

बहुलक वर्ग से ठीक बाद में आने वाले वर्ग की बारंबारता (f_2) = 14

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h = 35 + \left(\frac{23 - 21}{2 \times 23 - 21 - 14}\right) \times 10 = 35 + \frac{2}{11} \times 10 = 35 + 1.81 = 36.81$$



अतः, इस बंटन का बहुलक 36.8 है। यह दर्शाता है कि अस्पताल में भर्ती अधिकतम रोगी 36.8 वर्ष के हैं।

8. एक अभाज्य संख्या के कुल कितने गुणनखण्ड संभव हैं।

अ. 1

ब. 2

स. 0

द. 3

(ब)

9. दो संख्याओं का म.स. 27 तथा ल.स. 162 हैं, यदि एक संख्या 54 है तो दूसरी संख्या होगी।

अ. 36

ब. 45

स. 81

द. 108

(स)

10. 225 को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

अ. 5×3^2

ब. $5^2 \times 3$

स. $5^2 \times 3^2$

द. $5 \times 3^2 \times 2$

(स)

अति लघुात्मक प्रश्न

Q1. निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखंड के रूप में व्यक्त कीजिये :

(i) 140

हल:

7	140
5	20
2	4
2	2
	1

Prime Factorisation of :

$$140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7$$

140 का अभाज्य गुणनखंड

$$= 2^2 \times 5 \times 7$$

प्रश्न 2:

सिद्ध कीजिए कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उत्तर 2:

माना कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

इसलिए, माना

$$3 + 2\sqrt{5} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

जहाँ a और b पूर्णांक हैं तथा a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

$$3 + 2\sqrt{5} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{5} = \frac{a}{b} - 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} - 3 \right)$$

क्योंकि a और b पूर्णांक हैं, इसलिए $\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} - 3 \right)$ एक परिमेय संख्या है। इसलिए, $\sqrt{5}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।

परन्तु हम जानते हैं कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। अतः, $3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्र.3 निम्न को हल कीजिये -

$$(i) \frac{13}{3125}$$

$$= \frac{13}{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}$$

$$= \frac{13}{5^5}$$

हर का अभाज्य गुणनखंड 5^5 है और इसे $2^m \times 5^n$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है अतः यह एक सांत दशमलव प्रसार है।

$$(ii) \frac{17}{8}$$

$$= \frac{17}{2 \times 2 \times 2}$$

$$= \frac{17}{2^3}$$

हर का अभाज्य गुणनखंड 2^3 है और इसे $2^m \times 5^n$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है अतः यह एक सांत दशमलव प्रसार है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

युक्लिड विभाजन अल्गोरिथम के प्रयोग से एच सी एफ ज्ञात करो –

(1) 135 और 225

$a = 225, b = 135$ {सबसे बड़ी संख्या को a तथा सबसे छोटी संख्या को b मानते हैं}

युक्लिड विभाजन अल्गोरिथम के प्रयोग से

$$a = bq + r \text{ (तब)}$$

$$225 = 135 \times 1 + 90$$

$$135 = 90 \times 1 + 45$$

$90 = 45 \times 2 + 0$ {जब हमें $r=0$ प्राप्त हो जाता है तो हम आगे हल करना बंद कर देते हैं}

$b = 45$ {फिर उससे b का मान HCF होता है}

$$HCF = 45$$

प्र०2. दर्शाइए कि कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक $6q + 1$, या $6q + 3$, या $6q + 5$, के रूप का होता है जहाँ q कोई पूर्णांक है।

हल:

दर्शाना है: $a = 6q + 1, 6q+3$ या $6q+5$

माना कि a कोई धनात्मक विषम पूर्णांक है; जहाँ $b = 6$ होगा,

जब हम 6 से a को विभाजित करते हैं जो शेषफल क्रमशः 0, 1, 2, 3, 4 और 5 पाते हैं;

जहाँ $0 \leq r < b$

यहाँ a एक विषम संख्या है इसलिए शेषफल भी विषम संख्या प्राप्त होता है।

शेषफल होगा 1 या 3 या 5

युक्लिड विभाजन अल्गोरिथम के प्रयोग से हम पाते हैं;

$$a = 6q + 1, 6q+3 \text{ या } 6q+5$$

प्र०3. किसी परेड में 616 सदस्यों वाली एक सेना (आर्मी) की टुकड़ी को 32 सदस्यों वाले एक आर्मी बैंड के पीछे मार्च करना है। दोनों समूहों को समान संख्या वाले स्तंभों में मार्च करना है। उन स्तंभों की अधिकतम संख्या क्या है, जिसमें वे मार्च कर सकते हैं ?

हल:

स्तंभों की अधिकतम संख्या = HCF (616, 32)

$a = 616, b = 32$ {सबसे बड़ी संख्या को a तथा सबसे छोटी संख्या को b मानते हैं}

युक्लिड विभाजन अल्गोरिथम के प्रयोग से

$$a = bq + r \text{ (तब)}$$

$616 = 32 \times 19 + 8$ {जब हमें $r=0$ प्राप्त हो जाता है तो हम आगे हल करना बंद कर देते हैं}

$$32 = 8 \times 4 + 0$$

$b = 8$ { b का मान HCF होता है}

$$HCF = 8$$

इसलिए स्तंभों की अधिकतम संख्या = 8

2. बहुपद

1. द्विघात के मूलों का योग बहुपद $7x^2 - 3x + 1$ है

(A) $2/7$

(B) $3/7$

(C) $4/7$

(D) $5/6$

उत्तर – B

2. त्रिघात बहुपद का व्यापक रूप है:

(a) $ax^2 + bx + c$

(b) $ax^3 + bx^2 + cx + d$

(c) $ax^4 + bx^3 + c$

(d) $ax^2 + bx^2 + c$

उत्तर (b)

3. बहुपद $4x^2 - 4x + 1$ के मूलों का गुणनफल होगा:

(a) -1

(b) 1

(c) $\frac{1}{4}$

(d) 0

उत्तर (c)

4. निम्नलिखित में कौन बहुपद नहीं है?

(a) $\sqrt{5}x^2 - 3\sqrt{2}x + 4$

(b) $\frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x + 2$

(c) $x + \frac{1}{x}$

(d) $3x^2 - 4x + \sqrt{5}$

उत्तर (c)

5. यदि द्विघात बहुपद में $x^2 - 2x + 5$ के मूल α, β हो तो $\alpha + \beta$ का मान होगा।

(a) -2

(b) 2

(c) 5

(d) -5

उत्तर (b)

6. $4x^2 + \frac{1}{7}$ किस प्रकार का बहुपद है ?

(a) रैखिक

(b) द्विघात

(c) त्रिघात

(d) इनमें से कोई नहीं

उत्तर (b)

7. बिना ज्ञात के बहुपद को क्या कहते हैं।

(a) द्विघात बहुपद

(b) शून्य बहुपद

(c) त्रिघात बहुपद

(d) रैखिक बहुपद

उत्तर (b)

8. बहुपद $P(x) = (3-x)(x-4)$ की घात है -

A. 2

B. 4

C. 0

D. 3

Ans - A

9. घात तीन के बहुपद को कहते हैं –

- (a) त्रिघात बहुपद
- (b) द्विघात बहुपद
- (c) रैखिक बहुपद
- (d) चतुर्थ घात बहुपद

उत्तर (a)

लघुतरात्मक प्रश्न

Q1. निम्न द्विघात बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

(i) $x^2 - 2x - 8$

2. बहुपद का शून्यक क्या होता है? लिखिये।

हल – एक वास्तविक संख्या a किसी बहुपद $p(x)$ का शून्यक कहलाएगी यदि $p(a) = 0$ हो अर्थात् x का वह मान जिससे बहुपद का मान शून्य हो जाए, बहुपद का शून्यक कहलाती है।

3. हल करो – $3x^2 - x - 4$

हल : $3x^2 - x - 4 = 0$

$$\Rightarrow 3x^2 - 4x + 3x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x(3x - 4) + 1(3x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow (3x - 4)(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (3x - 4) = 0, \text{ और } (x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow 3x = 4, \text{ और } x = -1$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{3}, \text{ और } x = -1$$

अतः $\alpha = \frac{4}{3}$, और $\beta = -1$

गुणांक $a = 3$, $b = -1$, और $c = -4$

शून्यकों तथा गुणांकों के बीच संबंध की सत्यता की जाँच :

$$\text{शून्यकों का योग } (\alpha + \beta) = \frac{-b}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} + (-1) = \frac{-(-1)}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{4-3}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \dots\dots (1)$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल } (\alpha\beta) = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \times (-1) = \frac{(-4)}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{3} = \frac{-4}{3} \dots\dots\dots (2)$$

अतः दोनों (1) और (2) स्थितियों में संबंध सत्य है ।

Q2. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः दी गई संख्याएँ हैं :

(i) $\frac{1}{4}, -1$

(ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{4}$

हल : (i) $\frac{1}{4}, -1$

दिया है : $\alpha + \beta = \frac{1}{4}, \alpha\beta = -1$

चूँकि $ax^2 + bx + c = kx^2 - k(\alpha + \beta)x + k\alpha\beta$

तुलना करने पर

$a = k, b = -k(\alpha + \beta)$ और $c = k\alpha\beta$

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{1}{4} \text{ और } \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$$

$$\Rightarrow a = 4$$

$$\Rightarrow b = -4(\alpha + \beta)$$

$$\Rightarrow c = k\alpha\beta = 4(-1)$$

अतः $ax^2 + bx + c$ के रूप में लिखने पर

$$\Rightarrow 4x^2 - 4(\alpha + \beta)x + 4(\alpha\beta)$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 4\left(\frac{1}{4}\right)x + 4(-1)$$

$$\Rightarrow 4x^2 - x - 4$$

हल : (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$

दूसरी विधि से :

दिया है : $\alpha + \beta = \sqrt{2}, \alpha\beta = \frac{1}{3}$

चूँकि $ax^2 + bx + c = kx^2 - k(\alpha + \beta)x + k\alpha\beta$

या $ax^2 + bx + c = k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$

या $\frac{ax^2 + bx + c}{k} = \left(x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{3}\right)$

या $\frac{ax^2 + bx + c}{k} = \frac{3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1}{3}$

यहाँ k एक अचर पद है, तुलना करने पर $k = 3$

$$\text{अतः } ax^2 + bx + c = 3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$$

$$\text{द्विघात बहुपद है : } 3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$$

निबंधात्मक प्रश्न

Q1. विभाजन एल्गोरिथम का प्रयोग करके, निम्न में $p(x)$ को $g(x)$ से भाग देने पर भागफल तथा शेषफल ज्ञात कीजिए :

(i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$, $g(x) = x^2 - 2$

(ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5$, $g(x) = x^2 + 1 - x$

हल : (i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$, $g(x) = x^2 - 2$

$$\begin{array}{r}
 x - 3 \\
 \hline
 x^2 - 2 \overline{) x^3 - 3x^2 + 5x - 3} \\
 \underline{(-) x^3 \qquad \qquad (+) 2x} \\
 - 3x^2 + 7x - 3 \\
 \underline{- 3x^2 \qquad \qquad + 6} \\
 (+) \qquad \qquad (-) \\
 \hline
 7x - 9
 \end{array}$$

भागफल $q(x) = x - 3$ और शेषफल $= 7x - 9$ है ।

हल : (ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5$, $g(x) = x^2 + 1 - x$

$$\begin{array}{r}
 x^2 - x + 1 \overline{) x^4 - 3x^2 + 4x + 5} \\
 \underline{(-) x^4 - x^3 + x^2} \\
 x^3 - 4x^2 + 4x + 5 \\
 \underline{(-) x^3 - x^2 + x} \\
 - 3x^2 + 3x + 5 \\
 \underline{(-) 3x^2 + 3x - 3} \\
 8
 \end{array}$$

प्रश्न - 2

$3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ के अन्य सभी शून्यक ज्ञात कीजिए,

यदि इसके दो शून्यक $\sqrt{\frac{5}{3}}$ और $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ हैं।

दिया है : $p(x) = 3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$

और दो शून्यक $\sqrt{\frac{5}{3}}$ और $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ हैं।

अतः $x = \sqrt{\frac{5}{3}}$, $x = -\sqrt{\frac{5}{3}}$

या $x - \sqrt{\frac{5}{3}} = 0$, $x + \sqrt{\frac{5}{3}} = 0$

या $(x - \sqrt{\frac{5}{3}})(x + \sqrt{\frac{5}{3}}) = 0$

या $x^2 - \left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2 = 0$

या $x^2 - \frac{5}{3} = 0$

या $3x^2 - 5 = 0$

अब $3x^2 - 5$ से $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ में भाग देने पर

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x + 1 \\ 3x^2 - 5 \overline{) 3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5} \\ \underline{(-) 3x^4 \qquad - 5x^2} \qquad \qquad \qquad \\ \qquad \qquad \qquad 6x^3 + 3x^2 - 10x - 5 \\ \underline{(-) 6x^3 \qquad - 10x} \qquad \qquad \qquad \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 3x^2 - 5 \\ \underline{\qquad \qquad \qquad 3x^2 - 5} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 0 \end{array}$$

$$\text{अतः } p(x) = (3x^2 - 5)(x^2 + 2x + 1)$$

अब, $x^2 + 2x + 1$ को गुणनखंड कर शून्यक ज्ञात करने पर -

$$= x^2 + x + x + 1 = 0$$

$$= x(x + 1) + 1(x + 1) = 0$$

$$= (x + 1)(x + 1) = 0$$

$$\text{या } x + 1 = 0, x + 1 = 0$$

$$\text{या } x = -1, x = -1$$

अतः दो अन्य शून्यक -1 और -1 हैं।

प्रश्न - 3

. यदि $x^3 - 3x^2 + x + 2$ को एक बहुपद $g(x)$ से भाग देने पर, भागफल और शेषफल क्रमशः $x - 2$ और $-2x + 4$ हैं तो $g(x)$ ज्ञात कीजिए।

$$\text{दिया है : भाज्य } p(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$$

$$\text{भागफल } q(x) = x - 2,$$

$$\text{शेषफल } r(x) = -2x + 4$$

$$\text{भाजक } g(x) = ?$$

$$\text{भाज्य} = \text{भाजक} \times \text{भागफल} + \text{शेषफल}$$

$$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$$

$$x^3 - 3x^2 + x + 2 = g(x)(x - 2) + (-2x + 4)$$

$$x^3 - 3x^2 + x + 2 + 2x - 4 = g(x)(x - 2)$$

$$g(x)(x - 2) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$$

$$g(x) = \frac{3^2 - 3x^2 + 3x - 2}{x - 2}$$

$x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ को $x - 2$ से भाग देने पर भाजक $g(x)$ प्राप्त होगा -

$$\begin{array}{r}
 x^2 - x + 1 \\
 x - 2 \overline{) x^3 - 3x^2 + 3x - 2} \\
 \underline{(-) x^3 \quad (+) 2x^2} \\
 -x^2 + 3x - 2 \\
 \underline{(+ x^2 \quad (-) 2x} \\
 x - 2 \\
 \underline{(-) x \quad (+) 2} \\
 0
 \end{array}$$

अतः भाजक $g(x) = x^2 - x + 1$ है।

प्रश्नावली – 3 दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म

वस्तुनिष्ठ प्रश्न :

1: एक रैखिक समीकरण की घात होगी

(अ) 0 (ब) 2 (स) 1 (द) कोई नहीं

2: यदि $x+2y=6$ हो तो इसको सन्तुष्ट करने वाला युग्म है

(अ) (1,2) (ब) (2,1) (स) (2,2) (द) (1,1)

3: बिन्दु $(-2,3)$ किस चतुर्थांश में स्थित है

(अ) प्रथम (ब) द्वितीय (स) तृतीय (द) चतुर्थ

4: y -अक्ष पर स्थित बिन्दु हैं

(अ) (2,3) (ब) (2,0) (स) (2,2) (द) (0,2)

5: दो अंकों वाली संख्या बताइये, जिसमें इकाई का अंक x तथा दहाई का अंक y हो

(अ) $10x+y$ (ब) $10y+x$ (स) दोनों (द) इनमें से कोई नहीं

6: पिता की आयु पुत्र की आयु की तिगुनी है, यदि पुत्र की आयु x वर्ष है, तो 5 वर्ष बाद पिता की आयु होगी

(अ) $3x+y$ (ब) $x+3y$ (स) $x+y$ (द) $x-y$

7: 7 पेंसिल तथा 5 पेंन की कीमत 29रु है। इसको बीजगणित रूप में लिखिए।

(अ) $7x+5y=29$ (ब) $7x+y=29$ (स) $x+5y=29$ (द) $x+y=29$

8: दो रैखिक समीकरणों के आलेख प्रतिच्छेदी रेखाएँ, तब रैखिक समीकरण का युग्म का

(अ) कोई हल नहीं (ब) एक हल है (स) दो हल हैं (द) अनेक हल

9: दो रैखिक समीकरणों के आलेख समान्तर रेखाएँ, तब रैखिक समीकरण का युग्म का

(अ) कोई हल नहीं (ब) एक हल है (स) दो हल हैं (द) अनेक हल

10: समीकरण युग्म $a_1x+b_1y+c_1=0$ व $a_2x+b_2y+c_2=0$ के सम्पाती होने की शर्त है

(अ) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ (ब) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (स) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (द) इनमें से कोई नहीं

रिक्त स्थान :

- 11: एक चर रैखिक समीकरण का एक हल होता है।
- 12: समीकरण $x=2$ का रैखिक आलेखअक्ष के समान्तर होगा।
- 13: समीकरण $y=2$ का रैखिक आलेखअक्ष के समान्तर होगा।
- 14: यदि $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ हो तो रैखिक समीकरण युग्म होता है।
- 15: यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ हो तो रैखिक समीकरण युग्म होता है।

उत्तरमाला

1. (स)	2.(स)	3.(ब)	4.(द)	5.(ब)
6. (अ)	7.(अ)	8.(ब)	9.(अ)	10.(स)
11.अद्वितीय हल	12. y अक्ष	13. x अक्ष	14. संगत	15. असंगत

अतिलघुरात्मक प्रश्न :

- 16: समीकरण निकाय $5x-3y+2=0$ तथा $6x+y-2=0$ का हल किस प्रकार का है।

हल : यहाँ $a_1= 5$ $b_1= -3$ $c_1= 2$ तथा $a_2= 6$ $b_2= 1$ $c_2= -2$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{5}{6}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{1}$$

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

अतः समीकरण निकाय का हल अद्वितीय है

- 17: दिखाइये रेखाएँ $x-4y+5=0$ और $3x-12y+8=0$ समान्तर हैं।

हल: यहाँ $a_1= 1$ $b_1= -4$ $c_1= 5$ तथा $a_2= 3$ $b_2= -12$ $c_2= 8$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-4}{-12} = \frac{1}{3}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

अतः समीकरण युग्म द्वारा निरूपित रेखाएँ समान्तर हैं।

- 18: रैखिक समीकरण युग्म $4x+2y= 5$ तथा $x-2y= 0$ को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए।

हल: समीकरण युग्म $4x+2y=5$ (1)

$$x-2y=0 \text{(2)}$$

समीकरण .(2) में से $x = 2y$ मान समीकरण .(1) में रखने पर

$$4.(2y) + 2y = 5$$

$$8y + 2y = 5$$

$$10y = 5$$

$$y = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

y मान समीकरण .(2) में रखने पर

$$x - 2.\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

अतः $x=1$ तथा $y = \frac{1}{2}$

19: रैखिक समीकरण युग्म $2x+y=6$ तथा $2x-y=2$ को विलोपन विधि से हल कीजिए।

हल : रैखिक समीकरण युग्म

$$2x+y=6 \text{(1)}$$

$$2x-y=2 \text{(2)}$$

समीकरण (1) में समीकरण (2) को जोड़ने पर

$$2x+y=6$$

$$\underline{2x-y=2}$$

$$4x = 8$$

$$x = 2$$

x मान समीकरण (1) में रखने पर

$$4+y = 6$$

$$y = 6-4$$

$$y = 2$$

अतः $x = 2$ तथा $y = 2$

20: k के किस मान के लिए समीकरण निकाय $x+2y = 3$ तथा $5x+ky = 15$ का अनन्त हल है।

हल : यहाँ $a_1 = 1$ $b_1 = 2$ $c_1 = 3$ तथा $a_2 = 5$ $b_2 = k$ $c_2 = 15$

समीकरण निकाय का अनन्त हल है

$$\text{अतः} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{k} = \frac{3}{15}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{k}$$

$$k = 10$$

21. क्रिकेट टीम के एक कोच ने 3900 रु में 3 बल्ले तथा 6 गेंदे खरीदी। बाद में उसने एक और बल्ला तथा उसी प्रकार की 2 गेंदे 1300 रु में खरीदी। इस स्थिति को बीजगणितीय तथा ज्यामितीय रूपों में व्यक्त कीजिए।

हल : माना एक बल्ले का मूल्य = x रुपये

और एक गेंद का मूल्य = y रुपये

अतः बीजगणितीय निरूपण

$$3x + 6y = 3900 \dots\dots\dots (1) \text{ और}$$

$$x + 2y = 1300 \dots\dots\dots (2)$$

समी० (1) से

$$3x + 6y = 3900$$

$$3(x + 2y) = 3990$$

$$\text{या } x + 2y = 1300$$

$$x = 1300 - 2y$$

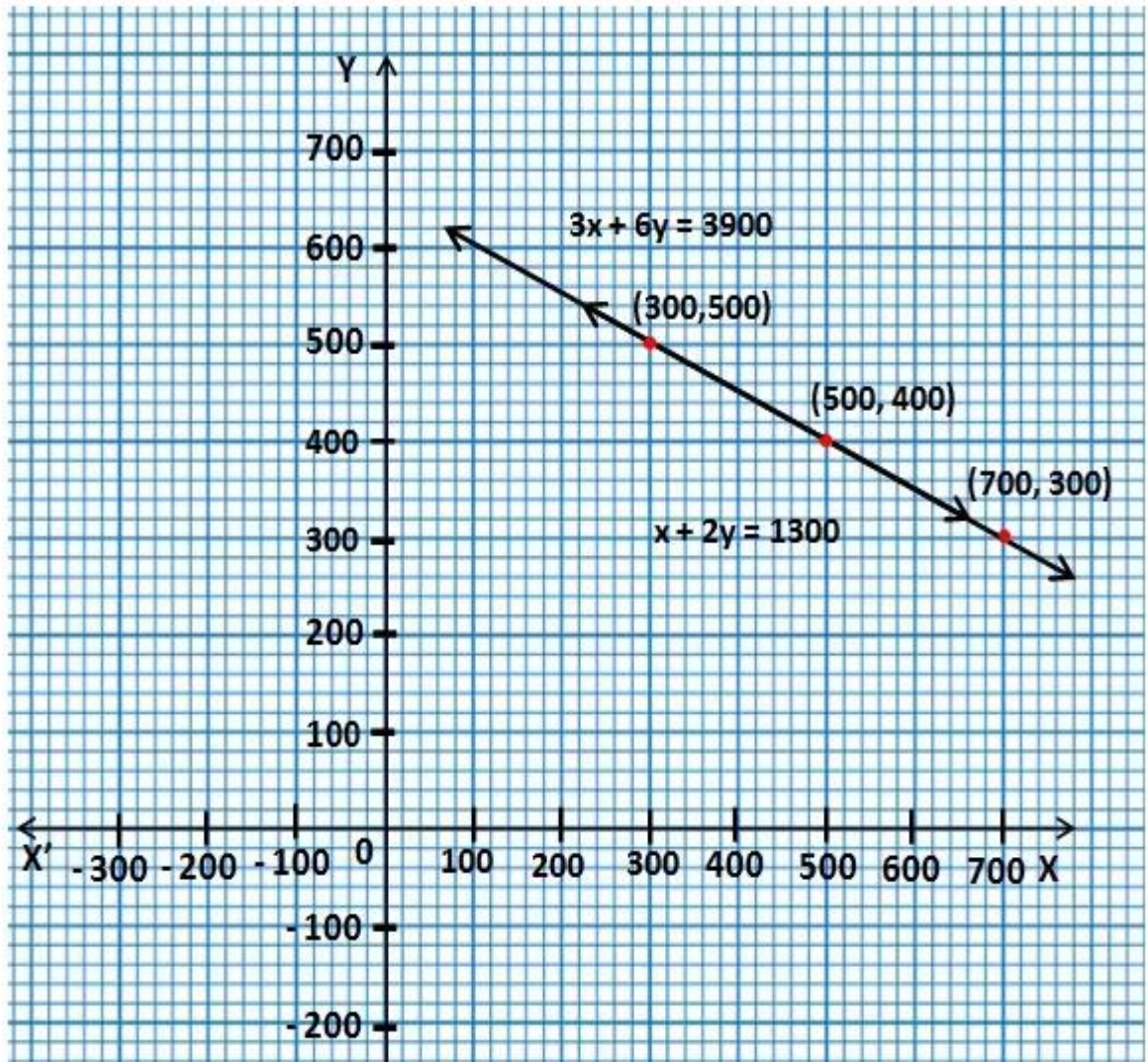
x	700	500	300
y	300	400	500

इसी प्रकार समी० (2) से

$$x + 2y = 1300$$

$$x = 1300 - 2y$$

x	700	500	300
y	300	400	500



(i) कक्षा x के 10 विधार्थियों ने एक गणित की पहेली प्रतियोगिता में भाग लिया। यदि लड़कियों की संख्या लड़कों से 4 अधिक हो, तो प्रतियोगिता में भाग लिए लड़को और लड़कियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल :

माना लड़कियों की संख्या = x

तथा लड़कों की संख्या = y

प्रश्नानुसार,

लड़के और लड़कियाँ की कुल संख्या 10 है।

इसलिए, $x + y = 10$ (1)

लड़कों से लड़कियाँ 4 अधिक हैं।

इसलिए, $x - y = 4$ (2)

समी० (1) के लिए तालिका

$$x + y = 10$$

$$\Rightarrow x = 10 - y$$

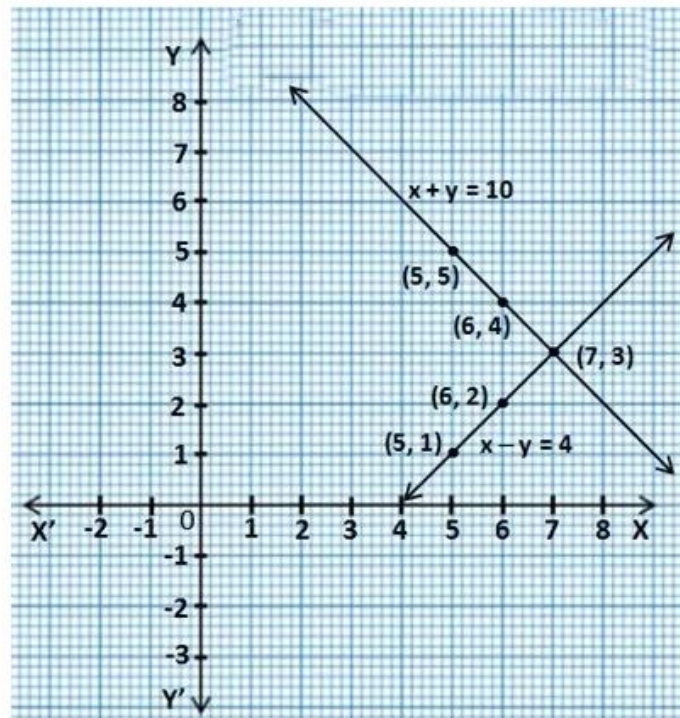
x	5	6	7
y	5	4	3

समी० (2) के लिए तालिका

$$x - y = 4$$

$$\Rightarrow x = 4 + y$$

x	5	6	7
y	1	2	3



ग्राफीय विधि से हल के लिए हम जब बने ग्राफ को देखते हैं तो पाते हैं कि बिंदु (7, 3) दिए गए समीकरण के लिए प्रतिच्छेदन बिंदु है जो कि रैखिक समीकरण युग्म का उभयनिष्ठ हल है।

इसलिए, लड़कियों की संख्या = 7 और लड़कों की संख्या = 3 है।

(ii) 5 पेसिल तथा 7 कलमों का कुल मूल्य 50 रू. है, जबकि 7 पेसिल तथा 5 कलमों का कुल मूल्य 46 रू. है। एक पेसिल का मूल्य तथा एक कलम का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल :

माना एक पेसिल का मूल्य = x रू०

और एक कलम का मूल्य = y रू०

प्रश्नानुसार,

$$5x + 7y = 50 \dots\dots\dots (1) \text{ और}$$

$$7x + 5y = 46 \dots\dots\dots(2)$$

समी० (1) से

$$5x + 7y = 50$$

$$\Rightarrow 5x = 50 - 7y$$

$$\Rightarrow x = \frac{50-7y}{5}$$

x	3	10	-4
y	5	0	10

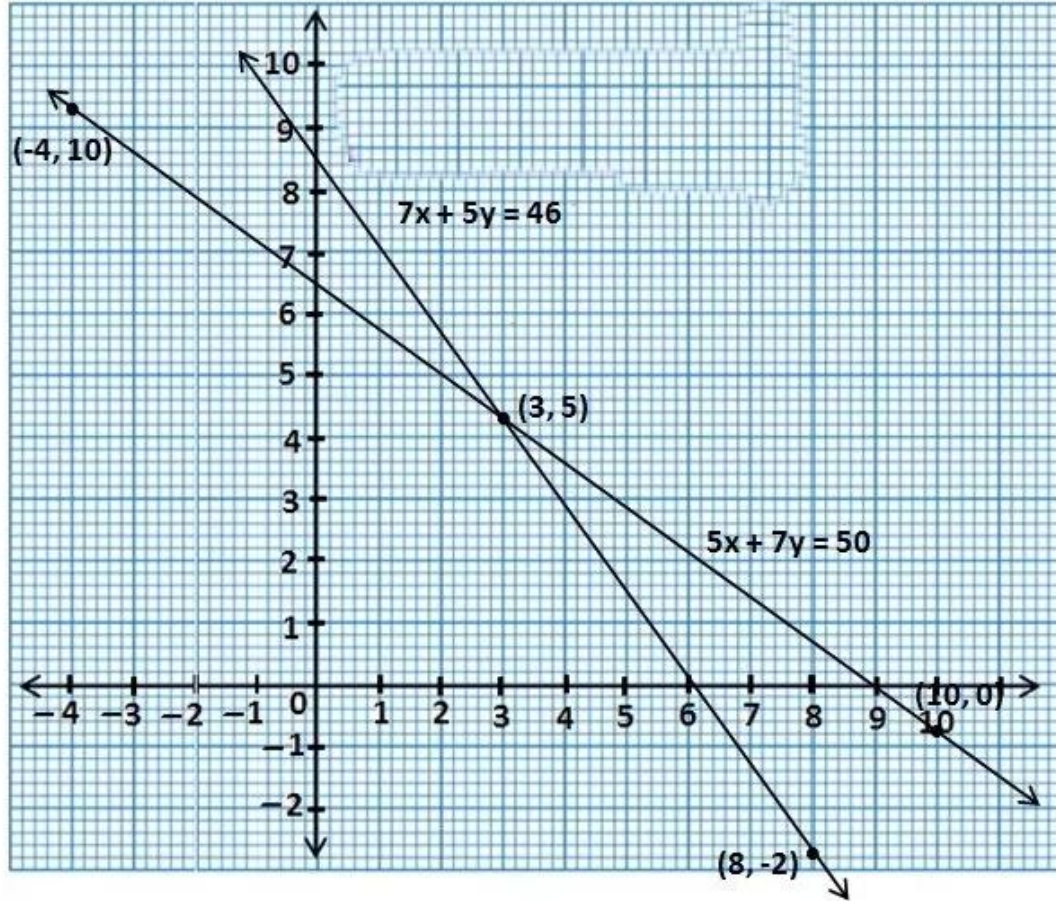
समी० (2) से

$$7x + 5y = 46$$

$$\Rightarrow 7x = 46 - 5y$$

$$\Rightarrow x = \frac{46-5y}{7}$$

x	8	3	-2
y	-2	5	12



ग्राफीय विधि से हल के लिए हम जब बने ग्राफ को देखते हैं तो पाते हैं कि बिंदु (3, 5) दिए गए समीकरण के लिए प्रतिच्छेदन बिंदु है जो कि रैखिक समीकरण युग्म का उभयनिष्ठ हल है।

इसलिए, पेन्सिल का मूल्य = 3 और कलम का मूल्य = 5 है।

(i) यदि हम अंश में 1 जोड़ दे तथा हर में से 1 घटा दे, तो भिन्न 1 में बदल जाती है। यदि हर में 1 जोड़ दे, तो यह $\frac{1}{2}$ हो जाती वह भिन्न क्या है?

हल: माना भिन्न का अंश x और हर y है।

इसलिए, भिन्न = $\frac{x}{y}$

$$\frac{x+1}{y-1} = \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow x + 1 = y - 1$$

$$\Rightarrow x - y = -1 - 1$$

$$\Rightarrow x - y = -2 \quad \dots\dots\dots (i)$$

$$\frac{x}{y+1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2x = y + 1$$

$$\Rightarrow 2x - y = 1 \quad \dots\dots\dots (ii)$$

(यहाँ समीकरण (i) और (ii) में y के गुणांक पहले ही से बराबर है इसलिए इन्हें बराबर करने की जरूरत नहीं है।)

अब समीकरण (i) में से (ii) घटाने पर

$$\begin{array}{r} x - y = -2 \\ (-) \quad (+) \quad (-) \\ \hline 2x - y = 1 \\ \hline -x - y = -3 \end{array}$$

$$\therefore x = 3$$

अब x का मान 3 समीकरण (i) में रखने पर

$$x - y = -2$$

$$\Rightarrow 3 - y = -2$$

$$\Rightarrow y = 3 + 2$$

$$\Rightarrow y = 5$$

$$\text{अतः अभीष्ट भिन्न} = \frac{3}{5}$$

(ii) पाँच वर्ष पूर्व नूरी की आयु सोनू की तीन गुनी थी। दस वर्ष पश्चात्, नूरी की आयु सोनू की आयु की दो गुनी हो जाएगी नूरी और सोनू की आयु में कितनी है ?

हल : माना नूरी की आयु x वर्ष

और सोनू की आयु y वर्ष

स्थिति I

पाँच वर्ष पूर्व,

नूरी की आयु = x - 5 वर्ष

सोनू की आयु = y - 5 वर्ष

प्रश्नानुसार,

$$x - 5 = 5(y - 5)$$

$$\text{या } x - 5 = 5y - 25$$

$$\text{या } x - 5y = 5 - 25$$

$$\text{या } x - 5y = -20 \dots\dots\dots (i)$$

स्थिति II

दस वर्ष बाद,

$$\text{नूरी की आयु} = x + 10 \text{ वर्ष}$$

$$\text{सोनू की आयु} = y + 10 \text{ वर्ष}$$

प्रश्नानुसार,

$$x + 10 = 2(y + 10)$$

$$\text{या } x + 10 = 2y + 20$$

$$\text{या } x - 2y = 20 - 10$$

$$\text{या } x - 2y = 10 \dots\dots\dots (ii)$$

(चूँकि x के गुणांक स्वतः बराबर है इसलिए गुणांक बराबर नहीं करेंगे)

अब समीकरण (i) में से (ii) घटाने पर

$$\begin{array}{r} x - 5y = -20 \dots\dots\dots (i) \\ - \quad x - 2y = 10 \dots\dots\dots (ii) \\ \hline \quad \quad -3y = -30 \end{array}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-30}{-3} = 10$$

$y = 10$ समीकरण (i) में रखने पर

$$x - 5y = - 20$$

या $x - 5(10) = - 20$

या $x - 50 = - 20$

या $x = 50 - 20$

या $x = 30$

अतः नूरी की आयु 30 वर्ष है और सोनू की आयु 10 वर्ष है।

(iii) दो अंको की संख्या के अंको का योग 9 है। इस संख्या का 9 गुना, संख्या के अंको को पलटने से बनी संख्या का दो गुना है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : माना संख्या के इकाई का अंक x है।

और दहाई का अंक y है।

तो वास्तविक संख्या = $10y + x$ होगी,

और पलटी हुई संख्या = $10x + y$

स्थिति I

$$x + y = 9 \dots\dots\dots (i)$$

स्थिति II

$$9(\text{संख्या}) = 2(\text{पलटी संख्या})$$

या $9(10y + x) = 2(10x + y)$

या $90y + 9x = 20x + 2y$

या $20x - 9x + 2y - 90y = 0$

या $11x - 88y = 0$

या $x - 8y = 0$

या $x = 8y$ (ii)

समीकरण (i) में $x = 8y$ रखने पर

$$x + y = 9$$

या $8y + y = 9$

या $9y = 9$

या $y = 1$

$y = 1$ समीकरण दो में रखने पर

$$x = 8y = 8 \times 1 = 8$$

अतः अभीष्ट संख्या $= 10y + x$

$$= 10 \times 1 + 8$$

$$= 18$$

4 द्विघात समीकरण

1. समीकरण $x = \frac{1}{x}$ के हल हैं -
 (A) -1,-1 (B) -1,1
 (B) 0,1 (D) 1,1 (B)
2. 3 और -5 मूलों वाला द्विघात समीकरण हैं-
 (A) $x^2 + 2x - 15 = 0$ (B) $x^2 - 8x - 15 = 0$
 (B) $x^2 - 3x + 70 = 0$ (D) $x^2 + 3x + 70 = 0$ (A)
3. समीकरण $5x^2 - \frac{49}{5} = 0$ के हल हैं-
 (A) $\frac{49}{25}, \frac{-49}{25}$ (B) $\frac{5}{7}, \frac{-5}{7}$
 (C) $\frac{-7}{5}, \frac{7}{5}$ (D) $\frac{-7}{\sqrt{5}}, \frac{7}{\sqrt{5}}$ (B)
4. बहुपद $x^2 - 3x - m(m + 3)$ के शून्यक हैं -
 (A) $m, m + 3$ (B) $-m, m+3$
 (C) $m, -(m + 3)$ (D) $-m, -(m + 3)$ (B)
5. निम्नलिखित में से कौनसी द्विघात समीकरण को हल करने की एक विधि है-
 (A) गुणनखण्ड विधि (B) पूर्ण वर्ग विधि
 (C) द्विघात सूत्र (D) उपरोक्त सभी (D)
6. द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल समान होंगे यदि
 (A) $b^2 = 4ac$ (B) $b^2 = -4ac$
 (C) $b^2 = ac$ (D) इनमें कोई नहीं [उत्तर : (A)]
7. समीकरण $\frac{x^2}{4} = 9$ का हल हैं -
 (A) 6, 0 (B) -6, 0
 (C) ± 6 (D) ± 36 [उत्तर : (C)]
8. एक त्रिघात बहुपद के अधिक से अधिक शून्यकों की संख्या होती है -
 (A) 1 (B) 2

(C) 3 (D) 4 (C)

9. द्विघात समीकरण $px^2 + qx + r = 0, p \neq 0$ के मूल समान होंगे यदि –

(A) $p^2 < 4qr$ (B) $p^2 > 4qr$
(C) $q^2 = 4qr$ (D) $p^2 = 4qr$ (C)

10. यदि द्विघात समीकरण $x^2 - 2x + 4$ के शून्यक P और Q हैं, तो (P+Q) का मान ज्ञात कीजिये –

(A) -2 (B) 2
(C) 4 (D) -4 (B)

Q1. जाँच कीजिए कि क्या निम्न द्विघात समीकरण है:

(i) $(x + 1)^2 = 2(x - 3)$

हल :

$$(x + 1)^2 = 2(x - 3)$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x - 6$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 2x + 1 + 6 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 7 = 0$$

$ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में व्यक्त करने पर

$a = 1, b = 0$ और $c = 7$ प्राप्त होता है

$a = 1, b = 0$ और $c = 7$ प्राप्त होता है

चूँकि $a \neq 0$ है, अतः यह द्विघात समीकरण है ।

$$2. \quad x^2 + 3x + 1 = (x - 2)^2$$

$$\text{हल : } x^2 + 3x + 1 = (x - 2)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 1 = x^2 - 2x + 4$$

$$\Rightarrow x^2 - x^2 + 4x + 3x + 1 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 7x - 3 = 0$$

$ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है ।

∴ यह द्विघात समीकरण नहीं है ।

2. एक कुटीर उद्योग एक दिन में कुछ खिलौने निरूपत करता है। प्रत्येक खिलौने का मूल्य (रुपयों में) 55 में से एक दिन में निर्माण किए गए खिलौने की संख्या को घटाने से प्राप्त संख्या के बराबर है। किसी एक दिन, कुल निर्माण लागत 750 रु थी। हम उस दिन निर्माण किए गए खिलौनों की संख्या ज्ञात करना चाहेंगे।

हल : माना उस दिन निर्मित खिलौनों की संख्या = x

उस दिन प्रत्येक निर्मित खिलौनों का लागत = $55 - x$ रुपय

उस दिन कुल निर्माण लागत = 750

$$x(55 - x) = 750$$

$$55x - x^2 = 750$$

$$-x^2 + 55x - 750 = 0$$

$$x^2 - 55x + 750 = 0$$

$$x^2 - 30x - 25x + 750 = 0$$

$$x(x - 30) - 25(x - 30) = 0$$

$$(x - 30)(x - 25) = 0$$

$$x - 30 = 0 \text{ तथा } x - 25 = 0$$

$$x = 30 \text{ तथा } x = 25$$

उस दिन प्रत्येक खिलौने से निर्मित लागत $55 - 25 = 30$ Rs

Q3. ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए, जिनका योग 27 हो और गुणनफल 182 हो।

हल: संख्याओं का योग = 27

संख्याओं का गुणनफल = 182

माना पहली संख्या = x

दूसरी संख्या = $x + 1$

दोनों संख्या का गुणनफल = 182

$$x(27 - x) = 182$$

$$27x - x^2 = 182$$

$$-x^2 + 27x - 182 = 0$$

$$x^2 - 27x + 182 = 0$$

$$x^2 - 14x - 13x + 182 = 0$$

$$x^2 - 14x - 13x + 182 = 0$$

$$x(x - 14) - 13(x - 14) = 0$$

$$(x - 14)(x - 13) = 0$$

$$x - 14 = 0 \text{ तथा } x - 13 = 0$$

$$x = 14 \text{ तथा } x = 13$$

पहली संख्या = x

$$= 13$$

दूसरी संख्या = $x + 1$

$$= 13 + 1$$

$$= 14$$

Q5. एक समकोण त्रिभुज की ऊँचाई इसके आधार से 7 cm कम है। यदि कर्ण 13 cm का हो, तो अन्य दो भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

हल: समकोण त्रिभुज का आधार = x cm

समकोण त्रिभुज की ऊँचाई = $x - 7$ cm

समकोण त्रिभुज में कर्ण = 13 cm

पाईथागोरस प्रमेय के प्रयोग से

$$(\text{कर्ण})^2 = (\text{ऊँचाई})^2 + (\text{आधार})^2$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$(13)^2 = (x - 7)^2 + (x)^2$$

$$169 = x^2 - 14x + 49 + x^2$$

$$169 - 49 = 2x^2 - 14x$$

$$120 = 2(x^2 - 7x)$$

$$x^2 - 7x = 2/120$$

$$x^2 - 7x - 60 = 0$$

$$x^2 - 12x + 5x - 60 = 0$$

$$x(x - 12) + 5(x - 12) = 0$$

$$(x - 12)(x + 5) = 0$$

$$x - 12 = 0 \text{ तथा } x + 5 = 0$$

$$x = 12 \text{ तथा } x = -5$$

चूँकि

समकोण त्रिभुज का आधार = x cm

$$= 12 \text{ cm}$$

समकोण त्रिभुज की ऊँचाई = x - 7 cm

$$= 12 - 7$$

$$= 5 \text{ cm}$$

हल करो -

Q- 6

$$\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}, \quad x = -4, 7$$

$$\text{हल : } \frac{x-7-(x+4)}{(x+4)(x-7)} = \frac{11}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{x-7-x-4}{x^2-7x+4x-28} = \frac{11}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{-11}{x^2 - 3x - 28} = \frac{11}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x^2 - 3x - 28} = \frac{1}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x^2 - 3x - 28} = \frac{1}{30}$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 28 = -30$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 28 + 30 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 2) - 1(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x - 2 = 0, x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ और } x = 1$$

Q.- 7 3 वर्ष पूर्व रहमान की आयु का व्युत्क्रम और अब से 5 वर्ष पश्चात आयु के व्युत्क्रम का योग है। उसकी वर्तमान आयु ज्ञात करो -

हल : माना रहमान की वर्तमान आयु x वर्ष है।

तो प्रश्नानुसार, 3 वर्ष पूर्व रहमान की आयु = $x - 3$ वर्ष

आयु का व्युत्क्रम = $\frac{1}{x-3}$ वर्ष

5 वर्ष पश्चात् आयु का व्युत्क्रम = $\frac{1}{x+5}$ वर्ष

$$\text{अतः } \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x+5+x-3}{(x-3)(x+5)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+2}{x^2+5x-3x-15} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+2}{x^2+2x-15} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 3(2x + 2)$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 6x + 6$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 6x - 15 - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 3x - 21 = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 7) + 3(x - 7) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 7)(x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow x - 7 = 0, x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = 7 \text{ और } x = -3$$

अतः वर्तमान आयु धनात्मक संख्या 7 लेंगे | अतः रहमान की वर्तमान आयु 7 वर्ष है |

Q-8

एक क्लास टेस्ट में शेफाली के गणित और अंग्रेजी में प्राप्त किए गए अंकों का योग 30 है | यदि उसको गणित में 2 अंक अधिक और अंग्रेजी में 3 अंक कम मिले होते, तो उनके अंकों का गुणनफल 210 होता | उसके द्वारा दोनों विषयों में प्राप्त किए अंक ज्ञात कीजिए |

हल : माना गणित में प्राप्त अंक x है |

इसलिए, अंग्रेजी में प्राप्त अंक = $30 - x$

प्रश्नानुसार, $(x + 2) (30 - x - 3) = 210$

या $(x + 2) (27 - x) = 210$

या $27x - x^2 + 54 - 2x = 210$

या $25x - x^2 + 54 = 210$

या $x^2 - 25x + 210 - 54 = 0$

या $x^2 - 25x + 156 = 0$

या $x^2 - 12x - 13x + 156 = 0$

या $x(x - 12) - 13(x - 12) = 0$

या $(x - 12) (x - 13) = 0$

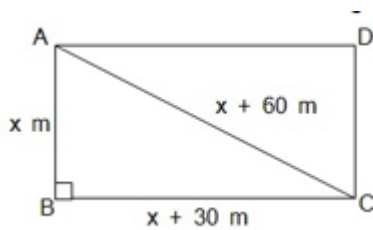
या $x - 12 = 0, x - 13 = 0$

या $x = 12$ अथवा $x = 13$

अब यदि $x = 12$ तो गणित में प्राप्त अंक = 12 और अंग्रेजी में प्राप्त अंक = $30 - 12 = 18$

और यदि $x = 13$ तो गणित में प्राप्त अंक = 13 और अंग्रेजी में प्राप्त अंक = $30 - 13 = 17$

Q-9 एक आयताकार खेत का विकर्ण छोटी भुजा से 60 मीटर अधिक लंबा है। यदि बड़ी भुजा छोटी भुजा से 30 मीटर अधिक हो, तो खेत की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।



हल : माना सबसे छोटी भुजा = x m

तो बड़ी भुजा = $x + 30$ m और

विकर्ण = $x + 60$ m

प्रश्नानुसार,

चूँकि ABCD एक आयत है जिसका प्रत्येक कोण समकोण है इसलिए ABC में,

पैथागोरस प्रमेय के प्रयोग से -

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow (x + 60)^2 = (x)^2 + (x + 30)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 120x + 3600 = x^2 + x^2 + 60x + 900$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x^2 + 60x - 120x + 900 - 3600 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 60x - 2700 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 90x + 30x - 2700 = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 90) + 30(x - 90) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 90)(x + 30) = 0$$

$$\Rightarrow x - 90 = 0, x + 30 = 0$$

$$\Rightarrow x = 90 \text{ और } x = -30$$

चूँकि आयता की लंबाई धनात्मक होती है इसलिए $x = 90$ ऋणात्मक नहीं होती

अतः छोटी भुजा = 90 m

तो बड़ी भुजा = $90 + 30 = 120$ m

और विकर्ण = $90 + 60 = 150$ m

Q.10

निम्न प्रत्येक द्विघात समीकरण में k का ऐसा मान ज्ञात कीजिए कि उसके दो बराबर मूल हों।

(i) $2x^2 + kx + 3 = 0$

(ii) $kx(x - 2) + 6 = 0$

हल: (i) $2x^2 + kx + 3 = 0$

$a = 2, b = k$ और $c = 3$

चूँकि दिए गए समीकरण के दो बराबर मूल हैं अर्थात्

$D = 0$

$$\text{अतः } b^2 - 4ac = 0$$

$$\Rightarrow (k)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 0$$

$$\Rightarrow k^2 - 24 = 0$$

$$\Rightarrow k^2 = 24$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{24}$$

$$\Rightarrow k = \pm 2\sqrt{6}$$

हल : (ii) $kx(x - 2) + 6 = 0$

$$\Rightarrow kx^2 - 2kx + 6 = 0$$

$$a = k, b = -2k, c = 6$$

चूँकि दिए गए समीकरण के दो बराबर मूल हैं अर्थात्

$$D = 0$$

$$\text{अतः } b^2 - 4ac = 0$$

$$\Rightarrow (-2k)^2 - 4 \times k \times 6 = 0$$

$$\Rightarrow 4k^2 - 24k = 0$$

$$\Rightarrow 4k^2 = 24k$$

$$\Rightarrow k = \frac{24k}{4k}$$

$$\Rightarrow k = 6$$

Q.11 एक रेलगाड़ी एक समान चाल से 360 किमी. की दूरी तय करती है। यदि यह चाल 5 किमी प्रति घंटा अधिक होती तो वह उसी यात्रा में 1 घंटा कम समय लेती। रेलगाड़ी की चाल ज्ञात कीजिए।

हल : माना रेलगाड़ी की समान्य चाल = x km/h

तय दुरी = 360 km

$$\text{लिया गया समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$$

$$\text{अतः समान्य लिया गया} = \frac{360}{x} \text{ घंटे}$$

5 km/h चाल बढ़ाने पर नयी चाल = $x + 5$ km/h

$$\text{अतः नया लिया गया समय} = \frac{360}{x + 5} \text{ घंटे}$$

चाल बढ़ने से समय घट जाता है चाल घटा देने से लिया गया समय बढ़ जाता है।

$$\frac{360}{x} > \frac{360}{x + 5}$$

$$\text{प्रश्नानुसार, } \frac{360}{x} - \frac{360}{x + 5} = 1$$

$$360\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 5}\right) = 1$$

$$360\left(\frac{x + 5 - x}{x(x + 5)}\right) = 1$$

$$360\left(\frac{5}{x^2 + 5x}\right) = 1$$

$$\frac{1800}{x^2 + 5x} = 1$$

$$x^2 + 5x = 1800$$

$$x^2 + 5x - 1800 = 0$$

$$x^2 + 45x - 40x - 1800 = 0$$

$$x(x + 45) - 40(x + 45) = 0$$

$$(x + 45)(x - 40) = 0$$

$$x + 45 = 0, \quad x - 40 = 0$$

$$x = -45 \text{ और } x = 40$$

चूँकि गाड़ी की चाल ऋणात्मक नहीं हो सकती है इसलिए चाल = 40 km/h

प्रश्नावली – 5 समान्तर श्रेणी

1. निम्नलिखित में से कौन-सी समान्तर श्रेणी है—

(a) 2, 4, 8, 16	(b) $2, \frac{5}{2}, 3\frac{7}{2}, \dots$
(c) 1, 3, 7, 27	(d) 0.2, 0.22, 0.222,
2. यदि किसी A.P का तीसरा पद 5 है और 7 वां पद 9 है तो A.P. होगी

(a) 3, 4, 5	(b) 4, 2, 3
(c) -1, -2, -3	(d) 0, 5, -10,
3. A.P 10, 7, 4..... का 30 वां पद है —

(a) 97	(b) 77
(c) -77	(d) -87
4. यदि $a_n = 9 - 5n$ एक समान्तर श्रेणी का n वां पद है तो सार्व अन्तर होगा।

(a) -5	(b) 5
(c) 0	(d) -7
5. समान्तर श्रेणी 2, 7, 12..... का 11 वां पद होगा।

(a) 55	(b) 52
(c) 72	(d) 80
6. A.P. 3, 8, 13, 18 का कौनसा पद 75 हैं —

(a) 12	(b) 14
(c) 15	(d) 16
7. 636 योग प्राप्त करने के लिए A.P : 9, 17, 25 के कितने पद लेंगे —

(a) 12	(b) 18
(c) 20	(d) 10
8. A.P में $a = 5, d = 3, a_n = 50$ हो तो S_n होगा —

(a) 420	(b) 117
(c) 550	(d) 440
9. एक समान्तर श्रेणी का प्रथम पद P है तथा सर्वाअन्तर q हैं तो उसका 10 वां पद है—

(a) $q + 9p$	(b) $p - 9q$
(c) $p + 9q$	(d) $2p + 9q$
10. समान्तर श्रेणी 7, 5, 3, 1, -1, -3 का सर्वाअन्तर होगा।

(a) 2	(b) -2
(c) 4	(d) 0

11. निम्नलिखित में से प्रत्येक A.P. के लिए प्रथम पद तथा सार्वअन्तर लिखिए।

(i) 3, 1, -1, -3

दी गई

A.P = 3, 1, -1, -3

$a_1 = 3, a_2 = 1$

$a_3 = -1, a_4 = -3$

प्रथम पद $a = a_1 = 3$

सार्व अन्तर $d = a_2 - a_1 = 1 - 3 = -2$

अतः प्रथम पद = 3 तथा सार्वअन्तर = -2

12. A.P : 10, 7, 4, -62 का अंतिम पद से (प्रथम पद की ओर) 11 वां पद ज्ञात कीजिए।

हल— यहां — $a = 10, d = 7 - 10 = -3, L = -62,$

$L = a + (n-1)d$

अंतिम पद से 11 वां पद ज्ञात करने के लिए, हम इस AP के कुल पदों की संख्या ज्ञात करेंगे।

अतः $-62 = 10 + (n-1)(-3)$

या $-72 = (n-1)(-3)$

अर्थात् $(n-1) = 24$

$n = 25$

अतः दी हुई A.P. में 25 पद हैं।

अंतिम पद से 11 वां पद A.P. का 15 वां पद होगा।

अतः, $a_{15} = 10 + (15-1)(-3) = 10 - 42 = -32$

इसलिए, अंतिम पद से 11 वां पद -32 हैं।

13. निम्नलिखित समांतर श्रेणी में कितने पद हैं।

18, $15\frac{1}{2}$, 3,-47

यहां पहला पद $a = 18$

तथा सार्वअन्तर $d = 15\frac{1}{2} - 18$

$= \frac{31}{2} - 18 = \frac{31-36}{2}$

$= \frac{-5}{2}$

माना दी गई श्रेणी में n पद हैं।

n वां पद, $a_n = -47$

$= a + (n-1)d = -47$

$= 18 + (n-1)\frac{-5}{2} = -47$

$= \frac{-5(n-1)}{2} = -47 - 18 = -65$

$$= (n-1) = \frac{(-65) \times 2}{-5} = 26$$

$$n = 26 + 1 = 27$$

अंतः दी गई श्रेणी (A.P.) में 27 पद हैं।

14. उस (A.P.) का 31 वां पद ज्ञात कीजिए, जिसका 11 वां पद 38 है और 16 वां पद 73 है।

हल - माना A.P का प्रथम पद a तथा सार्वअन्तर d है।

$$\text{तब 11 वां पद } a_{11} = 38$$

$$a + (11-1)d = 38$$

$$= a + 10d = 38 \quad (1)$$

$$\text{और 16 वां पद } a_{16} = 73$$

$$= a + (16-1)d = 73$$

$$= a + 15d = 73 \quad (2)$$

समीकरण 2 में से 1 को घटाने पर,

$$(a+15d) - (a+10d) = 73-38$$

$$= a + 15d - a - 10d = 35$$

$$5d = 35$$

$$d = \frac{35}{5} = 7$$

समीकरण 1 में से d का मान रखने पर,

$$= a + 10 \times 7 = 38$$

$$a + 70 = 38$$

$$a = 38 - 70 = -32$$

श्रेणी का 31 वां पद

$$a_{31} = a + (31-1)d$$

$$= -32 + 30 \times 7$$

$$= -32 + 210 = 178$$

अतः A.P का 31 वां पद = 178

Q.15

क्या A.P, 11, 8, 5, 2... का एक पद - 150 है? क्यों?

$$a = 11, d = 8 - 11 = -3 \text{ और } a_n = -150$$

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$-150 = 11 + (n-1) \times (-3)$$

$$-161 = (n - 1) - 3$$

$$n - 1 = \frac{-161}{-3}$$

$$n - 1 = 53.66$$

$$n = 53.66 + 1$$

$$n = 54.66$$

यहाँ n क भिन्नात्मक संख्या है जो n के लिये संभव नहीं है इसलिये .150 दिए गए स. श्रेणी का पद नहीं है।

Q.16 यदि किसी स.श्रेणी के तीसरे और नौवें पद क्रमशः 4 और -8 हैं, तो इसका कौन सा पद शून्य होगा।

$$a_3 = 4$$

$$\Rightarrow a + 2d = 4 \dots\dots\dots (1)$$

और नौवा पद - 8 है।

$$a_9 = -8$$

$$\Rightarrow a + 8d = -8 \dots\dots\dots (2)$$

समी० (2) में से (1) घटाने पर

$$a + 8d - (a + 2d) = -8 - 4$$

$$a + 8d - a - 2d = -12$$

$$6d = -12$$

$$d = \frac{-12}{6} = -2$$

$$d = -2$$

समी० (1) में d का मान 2 रखने पर

$$a + 2d = 4$$

$$a = 2(-2) = 4$$

$$a = 4 + 4$$

$$a = 8$$

अतः $a = 8$, और $d = -2$

माना n वाँ पद शून्य है।

$$a_n = 0$$

$$a_n = a + (n - 1) d$$

$$\Rightarrow 0 = 8 + (n - 1) \cdot (-2)$$

$$\Rightarrow -8 = (n - 1) \cdot (-2)$$

$$\Rightarrow n - 1 = \frac{-8}{-2}$$

$$\Rightarrow n - 1 = 4$$

$$\Rightarrow n = 4 + 1 = 5$$

अतः 5 वाँ पद शून्य है।

Q.17 दो स. श्रेणियों का सार्व अन्तर समान है। यदि इनके 100वें पदों का अंतर 100 है, तो इनके 1000 वें पदों का अंतर क्या होगा?

माना प्रथम A.P का प्रथम पद = a

और दूसरे A.P का प्रथम पद = a' है।

और सार्व अंतर d है [चूँकि सार्व अंतर समान है] दिया है

प्रश्नानुसार,

$$a_{100} - a'_{100} = 100$$

$$a + 99d - (a' + 99d) = 100$$

$$a + 99d - a' - 99d = 100$$

$$a - a' = 100 \dots\dots\dots (1)$$

$$a_{1000} - a'_{1000} = a + 999d - (a' + 999d)$$

$$= a + 999d - a' - 999d$$

$$= a - a'$$

चूँकि $a - a' = 100$ है समी० (1) से

इसलिए, 1000वें पदों का अंतर भी 100 है।

Q-18

सुब्बा राव ने 1995 में D 5000 के मासिक वेतन पद कार्य आरंभ किया और प्रत्येक वर्ष 200 की वेतन वृद्धि प्राप्त की। किस वर्ष में उसका वेतन D 7000 हो गया?

दिए गए सुचना से हमें एक A.P प्राप्त होता है :

A.P: 5000, 5200, 5400, 7000

$a = 5000, d = 200, a_n = 7000$

$a_n = a + (n - 1)d$

$7000 = 5000 + (n - 1)200$

$7000 - 5000 = (n - 1)200$

$2000 = (n - 1)200$

$(n - 1) = \frac{2000}{200}$

$n - 1 = 20$

$n = 20 + 1$

$n = 21$ वर्ष

अतः 21 वर्ष बाद उसका वेतन 7000 हो जायेगा |

$1995 + 21 = 2016$ में हो जायेगा |

Q-19 रामकली ने किसी के प्रथम सप्ताह में डी 5 की और फिर अपनी साप्ताहिक बचत डी 1.75 बढ़ा दी गई। यदि n वें सप्ताह में उसकी साप्ताहिक बचत डी 20.75 हो जाती है, तो n ज्ञात करो -

इस सुचना से एक A.P प्राप्त होती है :

A.P: 5, 6.75, 8.50, , 20.75

$A = 5, d = 1.75, a_n = 20.75$

$a_n = a + (n - 1)d$

$20.75 = 5 + (n - 1)1.75$

$20.75 - 5 = (n - 1)1.75$

$$(n - 1) = \frac{15.75}{1.75}$$

$n - 1 = 9, n = 9 + 1 = 10$

पश्नावली – 6 त्रिभुज

1. त्रिभुज के दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा और तीसरी भुजा में क्या संबंध है।

(A) समांतर का

(B) असमांतर का

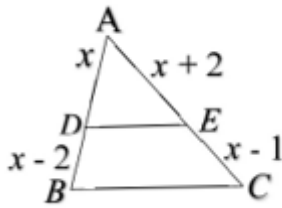
(C) दुगुना का

(D) कोई नहीं

Ans. (A)

2. .

ΔABC में $DE \parallel BC$ दिए परिमाणों के आधार पर x का मान क्या होगा ? यदि $AD = x$,
 $BD = x - 2$, $AE = x + 2$, $EC = x - 1$



(A) 4 इकाई

(B) 5 इकाई

(C) 6 इकाई

(D) 7 इकाई

(A)

3-

ΔABC में AB एवं AC के मध्य बिन्दु D एवं E इस प्रकार हैं कि $DE \parallel BC$ तथा $BC = 8$ सेमी, तब DE का मान होगा-

(A) 5 सेमी

(B) 3 सेमी

(C) 4 सेमी

(D) 2 सेमी

Ans. (C)

4.

एक समबाहु त्रिभुज ABC की एक भुजा $2a$ है, तो इसकी ऊँचाई होगी-

(A) $3a$

(B) $\sqrt{3}a$

(C) $\sqrt{3}a^2$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

Ans. (B)

5

. ΔABC में $DE \parallel BC$ जहाँ D , AB पर एक बिन्दु है और E , AC पर एक बिन्दु है तब

$$AD/DB = ?$$

(A) $\frac{AE}{EC}$

(B) $\frac{EC}{AE}$

(C) $-\frac{AE}{EC}$

(D) $\frac{AD}{AE}$

Ans. (A)

6.

. यदि दो समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाओं में 3 : 4 का अनुपात है, तो उनके परिमापों का अनुपात है

(A) 3 : 4

(B) 4 : 3

(C) 9 : 16

(D) 16 : 9

Ans. (B)

7

. ΔABC तथा ΔDEF में $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DF}$ ये दोनों त्रिभुज समरूप होंगे, यदि-

(A) $\angle B = \angle E$

(B) $\angle A = \angle D$

(C) $\angle B = \angle D$

(D) $\angle A = \angle F$

Ans. (A)

8

किसी समकोण शीर्ष से कर्ण पर खींचा गया लंब त्रिभुज को जिन दो त्रिभुजों में विभक्त करता है, वे-

(A) समरूप हैं

(B) असमरूप हैं

(C) बराबर हैं

(D) असमान हैं

Ans. (A)

9

. यदि दो त्रिभुजों ABC तथा PQR में $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$, तो

(A) $\Delta POR \sim \Delta CAB$ (B) $\Delta PQR \sim \Delta BCA$

(C) $\Delta CBA \sim \Delta PQR$ (D) $\Delta ABC \sim \Delta POR$ Ans. (D)

10

चक्रीय चतुर्भुज के चारों कोणों का योग होता है ?

(A) 180° (B) 360°

(C) 540° (D) सभी Ans. (B)

11

. किसी समद्विबाहु ΔABC में $AB = AC = 13$ cm तथा शीर्ष A से BC पर डाले गए लंब की लंबाई $AD = 5$ cm है। BC का मान होगा

(A) 26 cm (B) 10 cm

(C) 24 cm (D) 27 cm Ans. (C)

12

. किसी आयत के विकर्ण से बने वर्ग का क्षेत्रफल इसकी दोनों आसन्न भुजाओं पर बने वर्गों के

(A) योग के बराबर है (B) गुणनफल के बराबर है

(C) अंतर के बराबर है (D) भागफल के बराबर है Ans. (A)

Q1. आकृति 6.17 (i) और (ii) में, $DE \parallel BC$ में AD ज्ञात कीजिए :

हल: (i)

ΔABC में

$DE \parallel BC$ दिया है।

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय से

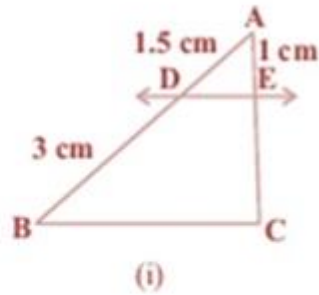
$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$$

$$\Rightarrow \frac{1.5}{3} = \frac{1}{CE}$$

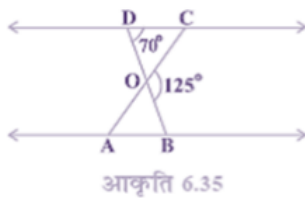
$$\Rightarrow 1.5 CE = 3$$

$$\Rightarrow CE = \frac{3}{1.5} = \frac{30}{15} = 2$$

$$\Rightarrow CE = 2$$



Q2. आकृति 6.35 में, $\triangle ODC \sim \triangle OBA$, $\angle BOC = 125^\circ$ और $\angle CDO = 70^\circ$ है। $\angle DOC$, $\angle DCO$ और $\angle OAB$ ज्ञात कीजिए।



हल: $\angle DOC + \angle BOC = 180^\circ$ (रैखिक युग्म)

$$\Rightarrow \angle DOC + 125^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DOC = 180^\circ - 125^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DOC = 55^\circ$$

अब $\triangle ODC$ में,

$$\angle DOC + \angle CDO + \angle DCO = 180^\circ \quad (\text{त्रिभुज के तीनों कोणों का योग})$$

$$\Rightarrow 55^\circ + 70^\circ + \angle DCO = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 125^\circ + \angle DCO = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DCO = 180^\circ - 125^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DCO = 55^\circ$$

अब $\triangle OBA$ में,

$$\angle DOC + \angle CDO + \angle DCO = 180^\circ \quad (\text{त्रिभुज के तीनों कोणों का योग})$$

$$\Rightarrow 55^\circ + 70^\circ + \angle DCO = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DOC = 55^\circ$$

अब $\triangle DOC$ में,

$$\angle DOC + \angle CDO + \angle DCO = 180^\circ \text{ (त्रिभुज के तीनों कोणों का योग)}$$

$$\Rightarrow 55^\circ + 70^\circ + \angle DCO = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 125^\circ + \angle DCO = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DCO = 180^\circ - 125^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DCO = 55^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DCO = 180^\circ - 125^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DCO = 55^\circ$$

$\triangle ODC \sim \triangle OBA$ (दिया है)

$$\therefore \angle OAB = \angle DCO = 55^\circ$$

(समरूप त्रिभुज के संगत कोण बराबर होते हैं।)

Q3. आकृति 6.18 में यदि $LM \parallel CB$ और $LN \parallel CD$ हो तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD} \text{ है।}$$

हल:

$\triangle ABC$ में

$ML \parallel BC$ दिया है।

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \frac{AM}{BM} = \frac{AL}{CL} \quad \dots(1)$$

$\triangle ACD$ में

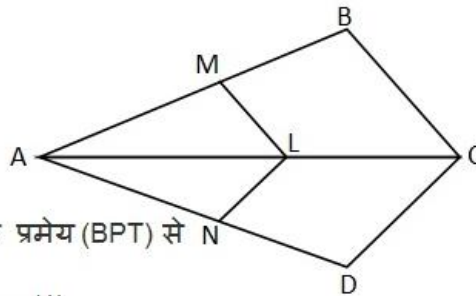
$NL \parallel DC$ दिया है।

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

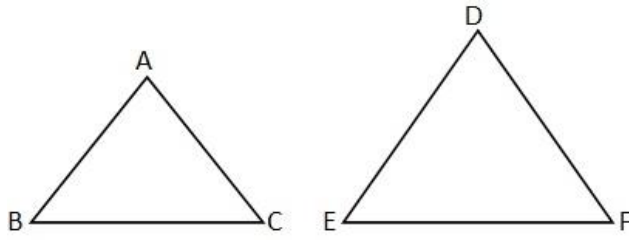
$$\therefore \frac{AN}{ND} = \frac{AL}{CL} \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{ND}$$



4. मान लीजिए $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ और इनके क्षेत्रफल क्रमशः 64 cm^2 और 121 cm^2 है। यदि $EF = 15.4 \text{ cm}$ हो तो BC ज्ञात कीजिए।



हल : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (दिया है)

\therefore प्रमेय 6.6 से

$$\frac{\text{ar}(ABC)}{\text{ar}(DEF)} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2$$

$$\frac{64}{121} = \left(\frac{BC}{15.4}\right)^2$$

या $\sqrt{\frac{64}{121}} = \frac{BC}{15.4}$

या $\frac{8}{11} = \frac{BC}{15.4}$

$$11 BC = 8 \times 15.4$$

$$BC = \frac{8 \times 15.4}{11}$$

$$= \frac{8 \times 154}{110} = \frac{8 \times 14}{10} = \frac{112}{10} = 11.2$$

5.

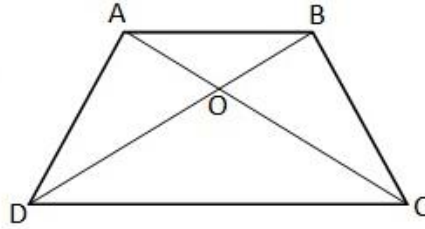
एक समलंब $ABCD$ जिसमें $AB \parallel DC$ हैं, के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $AB = 2 CD$ हो तो ΔAOB और ΔCOD के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल :

दिया है: $ABCD$ एक समलंब है जिसमें $AB \parallel DC$ हैं,

के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। और $AB = 2 CD$ है।

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{2}{1} \quad \dots\dots (1)$$



अब, $AB \parallel DC$ (दिया है)

$$\angle ABO = \angle CDO \quad \dots\dots (2) \text{ एकांतर कोण}$$

$\triangle AOB$ और $\triangle COD$ में,

$$\angle AOB = \angle COD \text{ शीर्षाभिमुख कोण}$$

$$\angle ABO = \angle CDO \text{ समी० (2) से}$$

A.A समरूपता कसौटी से

$$\triangle AOB \sim \triangle COD$$

अतः प्रमेय 6.6 से

$$\frac{\text{ar}(AOB)}{\text{ar}(COD)} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = \frac{4}{1}$$

$\triangle AOB$ और $\triangle COD$ के क्षेत्रफलों का अनुपात 4: 1 है ।

6. PQR एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण P समकोण है तथा QR पर बिंदु M इस प्रकार

स्थित है कि $PM \perp QR$ है । दर्शाइए कि $PM^2 = QM \cdot MR$ है ।

हल:

दिया है: PQR एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण P समकोण है तथा QR पर बिंदु M इस प्रकार स्थित है कि $PM \perp QR$ है ।

सिद्ध करना है: $PM^2 = QM \cdot MR$

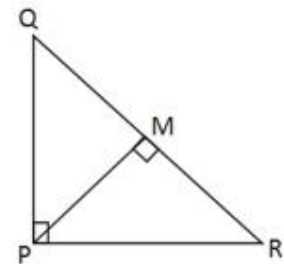
प्रमाण: $PM \perp QR$ दिया है ।

इसलिए प्रमेय 6.7 से

$$\triangle PMQ \sim \triangle PRQ \quad \dots\dots (1)$$

इसीप्रकार,

$$\triangle PMR \sim \triangle PRQ \quad \dots\dots (1)$$



समीकरण (1) तथा (2) से

$$\Delta PMQ \sim \Delta PMR$$

अतः $\frac{PM}{QM} = \frac{MR}{PM}$ (समरूप त्रिभुज की संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं)

$$\therefore PM^2 = QM \cdot MR$$

7. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसका कोण C समकोण है। सिद्ध कीजिए $AB^2 = 2AC^2$ है।

हल :

दिया है: ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसका कोण C समकोण है।

सिद्ध करना है: $AB^2 = 2AC^2$

प्रमाण: ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

$$AC = BC \dots\dots\dots (i)$$

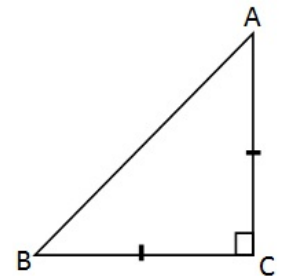
और ABC एक समकोण त्रिभुज है।

पाइथागोरस प्रमेय से

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$\text{अथवा } AB^2 = AC^2 + AC^2 \text{ (समी० 1 से)}$$

$$\text{अथवा } AB^2 = 2AC^2 \text{ Proved}$$



8. एक समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा $2a$ है। उसके प्रत्येक शीर्षलंब की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा $2a$ है।

$$AB = BC = AC = 2a$$

रचना : $AD \perp BC$ डाला।

अतः समकोण त्रिभुज ACD में

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

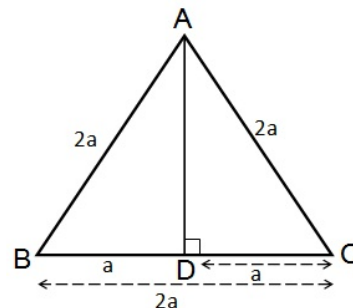
$$(2a)^2 = AD^2 + (a)^2$$

$$4a^2 = AD^2 + a^2$$

$$AD^2 = 4a^2 - a^2$$

$$AD^2 = 3a^2$$

$$AD = \sqrt{3a^2}$$



9.

समलंब ABCD, जिसमें AB || DC है, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं

| दो त्रिभुजों की समरूपता कसौटी का प्रयोग करते हुए,

दर्शाएँ कि $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ है।

दिया है : समलंब ABCD,

जिसमें AB || DC है, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

सिद्ध करना है : $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$

प्रमाण: AB || CD दिया है

∴ ∠ABO = ∠DCO (एकांतर कोण) ... (1)

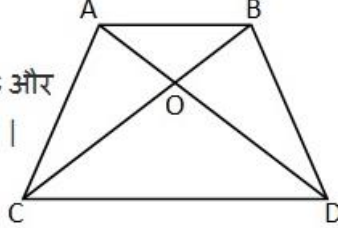
अब ΔAOB तथा ΔCOD में

∠ABO = ∠DCO (1) से

∠AOB = ∠COD (शीर्षाभिमुख कोण)

∴ ΔAOB ~ ΔCOD

∴ $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ (समरूप त्रिभुज के संगत भुजा समानुपाती होते हैं।)



10.

आकृति 6.37 में, यदि $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ है, तो दर्शाएँ कि $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ है।

दिया है : $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ है

सिद्ध करना है : $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

प्रमाण : $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ (दिया है)

∴ $\left. \begin{array}{l} AB = AC \\ AE = AD \end{array} \right\}$ By CPCT

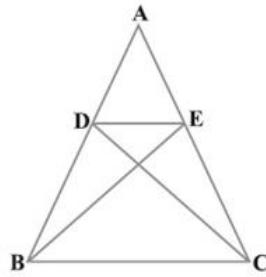
अथवा $\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{1}$ (1)

ΔADE तथा ΔABC में

$\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC}$ समी० (1) से

∠A = ∠A (उभयनिष्ठ)

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ by SAS



11. लंबाई 6 मी. वाले एक उध्वार्धर स्तम्भ की भूमि पर छाया की लंबाई 4 मी. है, जबकि उसी समय मीनार की छाया की लंबाई 28 मी. है। मीनार की उँचाई ज्ञात कीजिए।

माना PQ मीनार है जबकि ST स्तम्भ है | TR स्तम्भ

की छाया है और QR मीनार की छाया है।

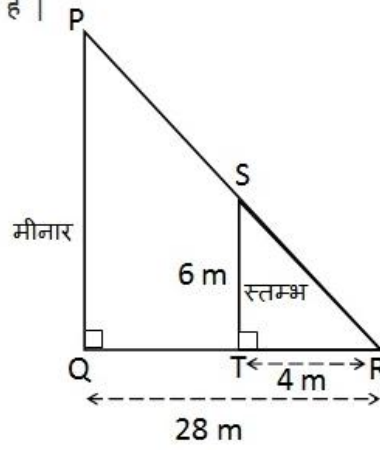
ΔPQR तथा ΔSTR में,

$$\angle PQR = \angle STR \quad (\text{प्रत्येक } 90^\circ)$$

$$\angle R = \angle R \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

A.A समरूपता कसौटी से

$$\Delta PQR \sim \Delta STR$$



$$\therefore \frac{PQ}{ST} = \frac{QR}{TR} \quad (\text{समरूप त्रिभुज के संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं})$$

$$\text{या } \frac{PQ}{6} = \frac{28}{4}$$

$$\text{या } \frac{PQ}{6} = \frac{28}{4}$$

$$\text{या } 4 PQ = 6 \times 28$$

$$\text{या } PQ = \frac{6 \times 28}{4} = 42 \text{ m}$$

अतः मीनार की उँचाई = 42 m

प्रश्नावली – 7 – निर्देशांक ज्यामिति

1. बिन्दु (4,-3) किस चतुर्थांश में है?
 अ. प्रथम
 स. तृतीय
 ब. द्वितीय
 द. चतुर्थ
2. कार्तीय तल में स्थित किसी बिन्दु (6, 4) के कोटि का मान होगा।
 अ. प्रथम
 स. तृतीय
 ब. द्वितीय
 द. चतुर्थ
3. बिन्दु (2,3) एवं , (-2,3) के बीच की दूरी होगी।
 अ. 6
 स. $\sqrt{3}$
 ब. 4
 द. 5
4. बिन्दु (2, 3) की दूरी मूल बिन्दु से होगी –
 अ. 2
 स. $2\sqrt{3}$
 ब. $\sqrt{13}$
 द. कोई नहीं
5. दो अक्षों के प्रतिच्छेदी बिंदु को कहते हैं?
 अ. निर्देशांक
 स. निर्देशांक अक्ष
 ब. मूलबिंदु
 द. इनमें से कोई नहीं

6.

मूलबिन्दु $O(0, 0)$ से बिन्दु $P(-x, -y)$ की दूरी होगी

(A) $\sqrt{x^2 + y^2}$

(B) $x^2 - y^2$

(C) $x^2 + y^2$

(D) $\sqrt{x^2 - y^2}$

[उत्तर : (A)]

7-

कार्तीय तल में स्थित किसी बिन्दु (6, 4) के कोटि का मान होगा

[2015 (C)]

(A) 6

(B) 4

(C) 5

(D) 2

[उत्तर : (B)]

8-

बिन्दुओं $p(-2, 8)$ और $q(-6, -4)$ को मिलाने वाली रेखाखंड का मध्यबिंदु है [2015 (A)]

- (A) $(-6, -4)$ (B) $(-4, 2)$
(C) $(2, 6)$ (D) $(-4, -6)$ [उत्तर : (B)]

9-

त्रिभुज का क्षेत्रफल (वर्ग इकाई में) जिसके शीर्ष $(-4, 0)$, $(0, 3)$ तथा $(0, 0)$ है, होगा

- (A) 36 (B) 12 (C) 6 (D) 1 [उत्तर : (C)]

10-

बिन्दु $(8, -8)$ किस चतुर्थांश में है?

- (A) प्रथम (B) द्वितीय
(C) तृतीय (D) चतुर्थ [उत्तर : (D)]

प्रश्न 1) दूरी सूत्र क्या है?

उत्तर - दूरी सूत्र द्वारा दो बिंदुओं $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

प्रश्न 2) मूल बिंदु से बिंदु (x, y) की दूरी क्या होती है?

उत्तर - मूल बिंदु से बिंदु (x, y) की दूरी $= \sqrt{x^2 + y^2}$

प्रश्न 3) आंतरिक और बाह्य विभाजन के लिए विभाजन सूत्र लिखें।

उत्तर - आंतरिक विभाजन के लिए विभाजन सूत्र \Rightarrow

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2} \quad \text{और} \quad y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

बाह्य विभाजन के लिए विभाजन सूत्र \Rightarrow

$$x = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2} \quad \text{और} \quad y = \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}$$

प्रश्न 4) यदि एक रेखाखंड दो बिंदुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) को मिलाता है, तो इसके मध्य बिंदु के निर्देशांक क्या होंगे?

उत्तर - $[(x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2]$

Q.1

x- अक्ष मान पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो (2,-5) और (-2,9) से समदूरस्थ हैं।

हल : माना A(2, -5), B(-2, 9), तथा X-अक्ष पर बिंदु P(x, 0), हैं ।

अतः $AP^2 = BP^2$ (चूँकि A तथा B बिंदु P से समदूरस्थ है)

$$\begin{aligned} [\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}]^2 &= [\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}]^2 \\ \Rightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 &= (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 \\ \Rightarrow (2 - x)^2 + (-5 - 0)^2 &= (-2 - x)^2 + (9 - 0)^2 \\ \Rightarrow (2)^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + (x)^2 + (-5)^2 &= (-2)^2 - 2 \cdot -2 \cdot x + (x)^2 + (9)^2 \\ \Rightarrow 4 - 4x + x^2 + 25 &= 4 + 4x + x^2 + 81 \\ \Rightarrow x^2 - 4x + 29 &= x^2 + 4x + 85 \\ \Rightarrow x^2 - x^2 - 85 + 29 &= 4x + 4x \\ \Rightarrow &-56 = 8x \\ \Rightarrow &x = \frac{-56}{8} \\ \Rightarrow &x = -7 \end{aligned}$$

अतः X-अक्ष पर बिंदु P (-7, 0) है ।

Q. 2.

y का वह मान ज्ञात कीजिए, जिसके लिए बिन्दु P(2,-3) और Q(10,y) के बीच की दूरी 10 मात्रक है ।

हल : बिंदु P(2, - 3) और Q(10, y) हैं तथा दोनों बिन्दुओं का मात्रक 10 हैं ।

∴ दूरी सूत्र से

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

दोनों तरफ वर्ग करने पर,

$$10^2 = (10 - 2)^2 + (y + 3)^2$$

$$100 = 8^2 + y^2 + 6y + 9$$

$$100 = 64 + y^2 + 6y + 9$$

$$100 = 73 + y^2 + 6y$$

$$100 - 73 = y^2 + 6y$$

$$y^2 + 6y = 27$$

$$y^2 + 6y - 27 = 0$$

$$y^2 + 9y - 3y - 27 = 0$$

$$y(y + 9) - 3(y + 9) = 0$$

$$(y + 9)(y - 3) = 0$$

$$y + 9 = 0 \text{ तथा } y - 3 = 0$$

$$\text{अतः } y = -9 \text{ तथा } y = 3$$

अतः y का एक मान 3 तथा -9 हैं |

Q.3 उस बिन्दू के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(-1, 7)$ और $(4, -3)$ को मिलाने वाले रेखाखंड को 2:3 के अनुपात में विभाजित करता है।

हल: माना वांछित बिन्दु $P(x, y)$ है।

यहाँ रेखाखण्ड के अन्तः बिन्दु हैं $(-1, 7)$ और $(4, -3)$

चूँकि अनुपात = 2 : 3 = $m_1 : m_2$

$$\therefore x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2} = \frac{(2 \times 4) + 3 \times (-1)}{2 + 3} = \frac{8 - 3}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\text{और } y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} = \frac{2 \times (-3) + (3 \times 7)}{2 + 3} = \frac{-6 + 21}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

इस प्रकार अभीष्ट बिन्दु $(1, 3)$ हैं।

Q.4 बिन्दुओं $(-3,10)$ और $(6,-8)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड को बिन्दु $(-1,6)$ किस अनुपात में विभाजित करता है।

हल: माना दिए गए बिन्दुओं के निर्देशांक हैं: $A(-3, 10)$ और $B(6, -8)$

माना बिन्दु $P(-1, 6)$ रेखाखण्ड AB को $m_1 : m_2$ के अनुपात में विभाजित करता है।

∴ विभाजन सूत्र से हमें प्राप्त होता है:

$$(-1, 6) = \left(\frac{x_2 m_1 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \right)$$

$$\Rightarrow (-1, 6) = \left(\frac{(m_1 \times 6) + [m_2 \times (-3)]}{m_1 + m_2}, \frac{[m_1 (-8)] + (m_2 \times 10)}{m_1 + m_2} \right)$$

$$\Rightarrow (-1, 6) = \frac{6m_1 + (-3m_2)}{m_1 + m_2}, \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow -1 = \frac{6m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{और} \quad 6 = \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow -1(m_1 + m_2) = 6m_1 - 3m_2 \quad \text{और} \quad 6(m_1 + m_2) = -8m_1 + 10m_2$$

$$\Rightarrow -m_1 - m_2 - 6m_1 + 3m_2 = 0 \quad \text{और} \quad 6m_1 + 6m_2 + 8m_1 - 10m_2 = 0$$

$$\Rightarrow -7m_1 + 2m_2 = 0 \quad \text{और} \quad 14m_1 - 4m_2 = 0 \quad \text{या} \quad 7m_1 - 2m_2 = 0$$

$$\Rightarrow 2m_2 = 7m_1 \quad \text{और} \quad 7m_1 = 2m_2$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{7} \quad \text{और} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{7}$$

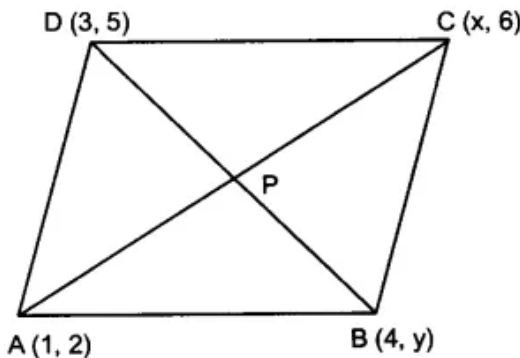
$$\Rightarrow m_1 : m_2 = 2 : 7 \quad \text{और} \quad m_1 : m_2 = 2 : 7$$

इस प्रकार अभीष्ट अनुपात $2 : 7$ है।

Q.5 यदि बिन्दु $(1,2)$, $(4,y)$, $(x,6)$ और $(3,5)$, इसी क्रम में लने पर, एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हो तो x और y ज्ञात कीजिए।

हल: हमें समांतर चतुर्भुज प्राप्त है, जिसके शीर्ष हैं:

$A(1, 2)$, $B(4, y)$, $C(x, 6)$ और $D(3, 5)$



चूँकि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर बिन्दु P पर समद्विभाग करते हैं।

∴ P के निर्देशांक हैं:

$$X = \frac{x+1}{2} = \frac{3+4}{2}$$

$$\Rightarrow x+1 = 7 \Rightarrow x = 6$$

$$Y = \frac{5+y}{2} = \frac{6+2}{2}$$

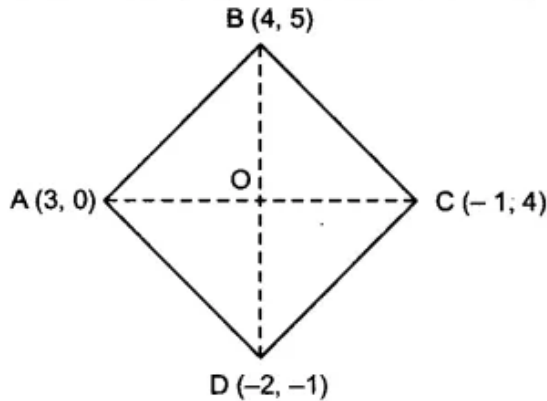
$$\Rightarrow 5+y = 8 \Rightarrow y = 3 \text{ इस प्रकार } x \text{ और } y$$

के अभीष्ट मान हैं: $x = 6, y = 3$

Q.5 एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष इसी क्रम में (3,0), (4,5), (-1,4) और (-2,-1) हैं।

हल: माना दिए गये समचतुर्भुज के शीर्ष निम्नांकित हैं:

A(3, 0), B(4, 5), C(-1, 4) और D(-2, -1)



चूँकि, AC और BD समचतुर्भुज ABCD के विकर्ण हैं।

$$\text{और विकर्ण AC} = \sqrt{(-1-3)^2 + (4-0)^2}$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (4)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{तथा विकर्ण BD} = \sqrt{(-2-4)^2 + (-1-5)^2}$$

$$= \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 36} = 6\sqrt{2}$$

चूँकि एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} (\text{विकर्णों का गुणनफल})$$

$$= \frac{1}{2} (AC \times BD)$$

$$= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} \text{ वर्ग इकाई}$$

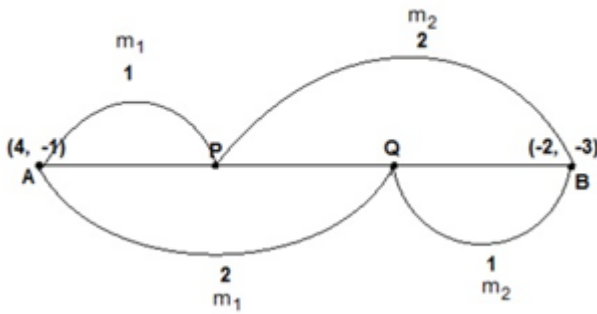
$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times 6 \text{ वर्ग इकाई}$$

$$= 4 \times 6 \text{ वर्ग इकाई}$$

$$= \mathbf{24 \text{ वर्ग इकाई}}$$

Q.6 बिन्दुओं (4,-1) और (-2,-3) को जोड़ने वाले रेखाखंड को सम त्रिभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल:



A(4, -1) और B(-2, -3) बिन्दुएँ हैं।

बिंदु P के लिए $m_1 = 1$ और $m_2 = 2$ चूँकि समत्रिभाजित करती हैं।

विभाजन सूत्र से बिंदु P(x, y) के निर्देशांक,

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

$$P\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

$$P\left(\frac{1 \times -2 + 2 \times 4}{1 + 2}, \frac{1 \times -3 + 2 \times -1}{1 + 2}\right)$$

$$P\left(\frac{-2 + 8}{3}, \frac{-3 + -2}{3}\right)$$

$$P\left(\frac{6}{3}, \frac{-5}{3}\right)$$

$$P\left(2, \frac{-5}{3}\right)$$

बिंदु Q के लिए $m_1 = 2$ और $m_2 = 1$ चूँकि समत्रिभाजित करती हैं।

विभाजन सूत्र से बिंदु Q(x, y) के निर्देशांक,

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

$$Q\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

$$Q\left(\frac{2 \times -2 + 1 \times 4}{1 + 2}, \frac{2 \times -3 + 1 \times -1}{1 + 2}\right)$$

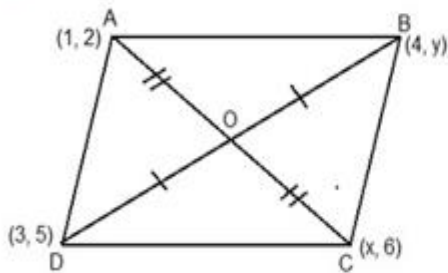
$$Q\left(\frac{-4 + 4}{3}, \frac{-6 + -1}{3}\right)$$

$$Q\left(\frac{0}{3}, \frac{-7}{3}\right)$$

$$Q\left(0, \frac{-7}{3}\right)$$

Q.7 यदि बिन्दु (1,2), (4,y), (x,6) और (3,5) इसी क्रम में लेने पर, एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हो तो x और y ज्ञात कीजिए।

हल:



ABCD एक समांतर चतुर्भुज है इसलिए इसके विकर्ण एक दुसरे को समद्विभाजित करते हैं।

इसलिए बिंदु O AC तथा BD के मध्य-बिंदु है।

अतः माध्य-बिंदु सूत्र से

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

बिंदु O के निर्देशांक - AC और BD के लिए बराबर होगा चूँकि दोनों विकर्ण का एक ही मध्य-बिंदु है।

$$\text{अतः } x = \frac{1+x}{2} = \frac{3+4}{2}$$

$$\text{या } 1+x = 7$$

$$\text{या } x = 7 - 1$$

$$\text{या } x = 6$$

$$\text{अब } y = \frac{2+6}{2} = \frac{5+y}{2}$$

$$\text{या } 8 = 5 + y$$

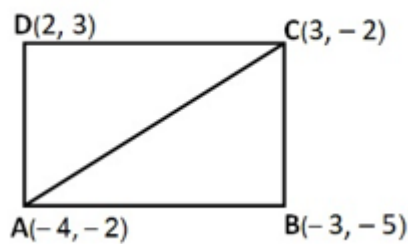
$$\text{या } y = 8 - 5$$

$$\text{या } y = 3$$

$$\text{अतः } x = 6 \text{ और } y = 3 \text{ है।}$$

Q.8 उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष, इसी क्रम में $(-4, -2)$, $(-3, -5)$, $(3, -2)$ और $(2, 3)$ है।

हल:



ABCD के शीर्ष $A(-4, -2)$, $B(-3, -5)$, $C(3, -2)$ और $D(2, 3)$ हैं।

$$\text{ar}(\triangle ABC) = \frac{1}{2} [-4(-5 - (-2)) + -3(-2 - (-2)) + 3(-2 - (-5))]$$

$$= \frac{1}{2} [-4(-5 + 2) + -3(-2 + 2) + 3(-2 + 5)]$$

$$= \frac{1}{2} [-4(-3) + -3(0) + 3(3)]$$

$$= \frac{1}{2} [12 + 0 + 9]$$

$$= \frac{21}{2} = 10.5 \text{ वर्ग इकाई}$$

$$\text{ar}(\triangle ACB) = \frac{1}{2} [-4(-2 - 3) + 3(3 - (-2)) + 2(-2 - (-2))]$$

$$= \frac{1}{2} [-4(-5) + 3(5) + 2(0)]$$

$$= \frac{1}{2} [20 + 15 + 0]$$

$$= \frac{1}{2} [35]$$

$$= \frac{35}{2} = 17.5 \text{ वर्ग इकाई}$$

$$\text{ABCD का क्षेत्रफल} = \text{ar}(\triangle ABC) + \text{ar}(\triangle ACD)$$

$$= 10.5 + 17.5 \text{ वर्ग इकाई}$$

$$= 28 \text{ वर्ग इकाई}$$

प्रश्नावली – 8 त्रिकोणमिति का परिचय

1. $\tan 60$ का मान है –

- (A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 1 (D) ∞

Ans – B

2. $\sec^2\theta - 1$ का मान है ।

- (A) $\operatorname{cosec}^2\theta$ (B) $\sin^2\theta$
(C) $\tan^2\theta$ (D) $\cot^2\theta$ [उत्तर : (C)]

3. यदि $A + B = 90$ तो $\cos A$ बराबर होगा ।

- (A) $\cos B$ (B) $\sin A$
(C) $\sin B$ (D) $\cos A$ Ans – C

4.

यदि $\theta = 45^\circ$ हो तो $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ का मान इनमें से कौन-सा होगा?

- (A) 0 (B) $1/2$
(C) 1 (D) $3/2$ [उत्तर : (A)]

5.

(i) $\frac{2 \tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ}$

- (A) $\sin 60^\circ$ (B) $\cos 60^\circ$ (C) $\tan 60^\circ$ (D) $\sin 30^\circ$ (A)

6.

$\frac{1 - \tan^2 45^\circ}{1 + \tan^2 45^\circ}$

- (A) $\tan 90^\circ$ (B) 1 (C) $\sin 45^\circ$ (D) 0 (D)

Q.1. यदि $15 \cot A = 8$ हो तो $\sin A$ और $\sec A$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल -

$$15 \cot A = 8$$

$$\cot A = \frac{8}{15}$$

A की सम्मुख भुजा = 15, A की संलग्न भुजा = 8

पाइथागोरस प्रमेय से,

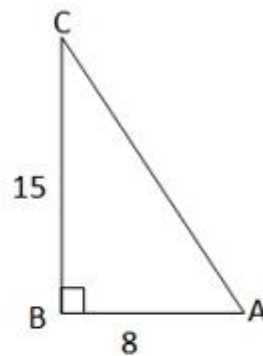
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= 8^2 + 15^2$$

$$= 64 + 225$$

$$AC^2 = 289$$

$$AC = \sqrt{289} = 17$$



$$15 \cot A = 8$$

$$\cot A = \frac{8}{15}$$

A की सम्मुख भुजा = 15, A की संलग्न भुजा = 8

पाइथागोरस प्रमेय से,

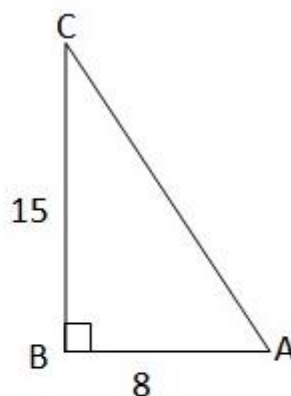
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= 8^2 + 15^2$$

$$= 64 + 225$$

$$AC^2 = 289$$

$$AC = \sqrt{289} = 17$$



$$\text{इसलिए, } \sin A = \frac{\text{A की सम्मुख भुजा}}{\text{समकोण की सम्मुख भुजा}} = \frac{BC}{AC} = \frac{15}{17}$$

$$\sec A = \frac{\text{समकोण की सम्मुख भुजा}}{\text{A की संलग्न भुजा}} = \frac{AC}{AB} = \frac{17}{8}$$

Q.2 निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

हल: $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों का मान रखने पर

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

(ii) $2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

हल: $2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

$$= 2 \times (1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= 2$$

Q3. यदि $\tan (A + B) = \sqrt{3}$ और $\tan (A - B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; है और

$0^\circ < A + B \leq 90^\circ$; $A > B$ तो A और B का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\tan (A + B) = \sqrt{3}$ (i) दिया है।

जबकि $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ (ii)

समीकरण (i) और (ii) की तुलना करने पर

$$\therefore \tan (A + B) = \tan 60^\circ$$

या $A + B = 60^\circ$ (iii)

इसीप्रकार,

$$\tan (A - B) = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{(iv)}$$

जबकि $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (v)

समीकरण (iv) और (v) की तुलना करने पर

$\therefore \tan (A - B) = \tan 30^\circ$

या $A - B = 30^\circ$ (vi)

समीकरण (iii) और (vi) जोड़ने पर

$$A + B + A - B = 60^\circ + 30^\circ$$

$$\Rightarrow 2A = 90^\circ$$

$$\Rightarrow A = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

A का मान समीकरण (iii) में रखने पर

$$A + B = 60^\circ$$

$$\Rightarrow 45^\circ + B = 60^\circ$$

$$\Rightarrow B = 60^\circ - 45^\circ$$

$$\Rightarrow B = 15^\circ$$

$$A = 45^\circ, B = 15^\circ$$

v

Q. 4.

(i) $\frac{\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ}$

हल: $\frac{\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ} = \frac{\cos(90^\circ - 18^\circ)}{\cos 72^\circ}$

$$= \frac{\cos 72^\circ}{\cos 72^\circ} = 1 \quad [\sin \theta = \cos (90^\circ - \theta)]$$

ii

$$\frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$$

हल: $\frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$

$$= \frac{\frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + 1}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{3}}}{\frac{4 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{3}} \times \frac{2\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 4}{4 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3\sqrt{3} - 4}{4 + 3\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{3\sqrt{3} - 4}{3\sqrt{3} + 4}$$

हर का परिमेइकरण करने पर

$$= \frac{3\sqrt{3} - 4}{3\sqrt{3} + 4} \times \frac{3\sqrt{3} - 4}{3\sqrt{3} - 4}$$

$$= \frac{(3\sqrt{3} - 4)^2}{(3\sqrt{3})^2 - 4^2}$$

$$= \frac{27 - 24\sqrt{3} + 16}{27 - 16} \quad [\because (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2]$$

$$= \frac{43 - 24\sqrt{3}}{11}$$

iii

$$\tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ = 1$$

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ \\ &= \cot (90^\circ - 48^\circ) \tan (90^\circ - 23^\circ) \tan 42^\circ \tan 67^\circ \\ &= \cot 42^\circ \cot 67^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ \\ &= (\cot 42^\circ \times \tan 42^\circ) (\cot 67^\circ \times \tan 67^\circ) \\ &= 1 \times 1 \quad [\cot A \times \tan A = 1] \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{LHS} = \text{RHS}$$

iv

$$\cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ = 0$$

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ \\ &= \sin (90^\circ - 38^\circ) \cos 52^\circ - \cos (90^\circ - 38^\circ) \sin 52^\circ \\ &= \sin 52^\circ \cos 52^\circ - \cos 52^\circ \sin 52^\circ \\ &= \sin 52^\circ (\cos 52^\circ - \cos 52^\circ) \\ &= \sin 52^\circ \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Q.5

यदि $\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$, जहाँ $2A$ एक न्यूनकोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$,

$$\Rightarrow \cot (90^\circ - 2A) = \cot(A - 18^\circ)$$

दोनों पक्षों में तुलना करने पर

$$\Rightarrow 90^\circ - 2A = A - 18^\circ$$

$$\Rightarrow 90^\circ + 18^\circ = A + 2A$$

$$\Rightarrow 3A = 108^\circ$$

$$\Rightarrow A = \frac{108^\circ}{3}$$

$$\Rightarrow A = 36^\circ$$

Q.6 यदि $\tan A = \cot B$, तो सिद्ध कीजिए कि $A + B = 90^\circ$

हल: $\tan A = \cot B$ दिया है।

$\Rightarrow \tan A = \tan (90^\circ - B)$ तुलना करने पर

$\Rightarrow A = 90^\circ - B$

$\Rightarrow A + B = 90^\circ$ Proved

Q.7

यदि $\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$, जहाँ $4A$ एक न्यूनकोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$

$\Rightarrow \operatorname{cosec}(90^\circ - 4A) = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$ [$\sec q = (90^\circ - q)$]

तुलना करने पर

$\Rightarrow 90^\circ - 4A = A - 20^\circ$

$\Rightarrow 90^\circ + 20^\circ = A + 4A$

$\Rightarrow 5A = 110^\circ$

$\Rightarrow A = \frac{110^\circ}{5}$

$\Rightarrow A = 22^\circ$

Q.8

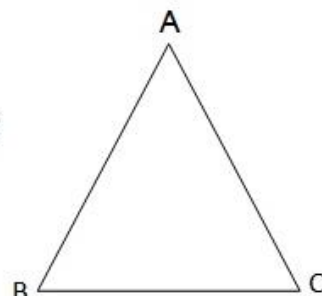
यदि A , B और C त्रिभुज ABC के अंतः कोण हों, तो दिखाइए कि

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos \frac{A}{2}$$

हल : A , B और C त्रिभुज ABC के अंतः कोण हैं

इसलिए, $A + B + C = 180^\circ$

(त्रिभुज के तीनों कोणों का योग)



अथवा, $B + C = 180^\circ - A$ (1)

अब, $RHS = \cos \frac{A}{2}$

$$\begin{aligned}
&= \sin\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) \quad [\cos \theta = \sin(90^\circ - \theta)] \\
&= \sin\left(\frac{180^\circ - A}{2}\right) \\
&= \sin\left(\frac{B + C}{2}\right)
\end{aligned}$$

LHS = RHS

Q.9 (i)

$$(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta)$$

Solution:

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{1}{\cos A}\right) \left(1 + \frac{\cos A}{\sin A} - \frac{1}{\sin A}\right) \\
&= \left(\frac{\cos A + \sin A + 1}{\cos A}\right) \left(\frac{\sin A + \cos A - 1}{\sin A}\right) \\
&= \left(\frac{(\sin A + \cos A)^2 - 1}{\sin A \cdot \cos A}\right) \\
&= \left(\frac{\sin^2 A + \cos^2 A + 2\sin A \cos A - 1}{\sin A \cdot \cos A}\right) \\
&= \left(\frac{1 + 2\sin A \cos A - 1}{\sin A \cdot \cos A}\right) \\
&= \frac{2\sin A \cos A}{\sin A \cdot \cos A} = 2
\end{aligned}$$

Used Formula:

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

(ii)

$$\frac{\sin^2 63^\circ + \sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ + \cos^2 73^\circ}$$

$$\frac{\sin^2 63^\circ + \sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ + \cos^2 73^\circ} = \frac{\sin^2 63^\circ + \cos^2(90^\circ - 27^\circ)}{\sin^2(90^\circ - 17^\circ) + \cos^2 73^\circ}$$

$$= \frac{\sin^2 63^\circ + \cos^2 63^\circ}{\sin^2 73^\circ + \cos^2 73^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

(iii) $\sin 25^\circ \cos 65^\circ + \cos 25^\circ \sin 65^\circ$

$$\begin{aligned} & \sin 25^\circ \cos 65^\circ + \cos 25^\circ \sin 65^\circ \\ &= \sin 25^\circ \sin(90^\circ - 65^\circ) + \cos 25^\circ \cos(90^\circ - 65^\circ) \\ &= \sin 25^\circ \sin 25^\circ + \cos 25^\circ \cos 25^\circ \\ &= \sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ \\ &= 1 \quad [\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1] \end{aligned}$$

(iv)

$$\frac{\cos A}{1 + \sin A} + \frac{1 + \sin A}{\cos A} = 2 \sec A$$

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \frac{\cos A}{1 + \sin A} + \frac{1 + \sin A}{\cos A} \quad \text{(Ctrl)} \\ &= \frac{\cos^2 A + (1 + \sin A)^2}{\cos A(1 + \sin A)} \\ &= \frac{\cos^2 A + 1 + \sin^2 A + 2\sin A}{\cos A(1 + \sin A)} \\ &= \frac{\cos^2 A + \sin^2 A + 1 + 2\sin A}{\cos A(1 + \sin A)} \\ &= \frac{1 + 1 + 2\sin A}{\cos A(1 + \sin A)} \\ &= \frac{2 + 2\sin A}{\cos A(1 + \sin A)} \\ &= \frac{2(1 + \sin A)}{\cos A(1 + \sin A)} \\ &= \frac{2}{\cos A} = 2 \times \frac{1}{\cos A} = 2 \sec A \end{aligned}$$

अतः LHS = RHS proved

(v)

$$\frac{1+\sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$$

Solution:

$$\text{LHS} = \frac{1+\sec A}{\sec A} = \frac{1+\frac{1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}}$$

$$= \frac{\frac{\cos A + 1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}}$$

$$= \frac{\cos A + 1}{\cos A} \times \frac{\cos A}{1} = \cos A + 1$$

$$\text{RHS} = \frac{\sin^2 A}{1-\cos A} = \frac{1-\cos^2 A}{1-\cos A}$$

$$= \frac{(1-\cos A)(1+\cos A)}{1-\cos A}$$

$$= 1 + \cos A \text{ या } \cos A + 1$$

Hence LHS = RHS

(vi)

$$\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$$

$$\text{LHS} = \sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \frac{\sqrt{1+\sin A}}{\sqrt{1-\sin A}}$$

हर का परिमेड़करण करने पर

$$= \frac{\sqrt{1+\sin A}}{\sqrt{1-\sin A}} \times \frac{\sqrt{1+\sin A}}{\sqrt{1+\sin A}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\sqrt{1+\sin A})^2}{\sqrt{1-\sin^2 A}} = \frac{1+\sin A}{\sqrt{\cos^2 A}} \\
&= \frac{1+\sin A}{\cos A} = \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A} \\
&= \sec A + \tan A
\end{aligned}$$

बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

$$(vii) \frac{\sin \theta - 2 \sin^3 \theta}{2 \cos^3 \theta - \cos \theta} = \tan \theta$$

Solution:

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \frac{\sin \theta - 2 \sin^3 \theta}{2 \cos^3 \theta - \cos \theta} \\
&= \frac{\sin \theta (1 - 2 \sin^2 \theta)}{\cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1)} \\
&= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{(1 - 2(1 - \cos^2 \theta))}{(2 \cos^2 \theta - 1)} \\
&= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{(1 - 2 + 2 \cos^2 \theta)}{(2 \cos^2 \theta - 1)} \\
&= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{(-1 + 2 \cos^2 \theta)}{(2 \cos^2 \theta - 1)} \\
&= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{(2 \cos^2 \theta - 1)}{(2 \cos^2 \theta - 1)} \\
&= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta
\end{aligned}$$

$$\text{(viii) } (\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$$

Solution:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= (\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 \\ &= \sin^2 A + 2 \cdot \sin A \cdot \operatorname{cosec} A + \operatorname{cosec}^2 A + \cos^2 A + 2 \cdot \cos A \cdot \sec A + \sec^2 A \\ &= \sin^2 A + 2 \cdot \sin A \cdot \frac{1}{\sin A} + \operatorname{cosec}^2 A + \cos^2 A + 2 \cdot \cos A \cdot \frac{1}{\cos A} + \sec^2 A \\ &= \sin^2 A + 2 + \operatorname{cosec}^2 A + \cos^2 A + 2 + \sec^2 A \\ &= \sin^2 A + \cos^2 A + 2 + 2 + \operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A \\ &= 1 + 4 + (1 + \tan^2 A) + (1 + \cot^2 A) \\ &= 7 + \tan^2 A + \cot^2 A \end{aligned}$$

LHS = RHS proved

(ix)

$$\left(\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} \right) = \left(\frac{1 - \tan A}{1 - \cot A} \right)^2 = \tan^2 A$$

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \left(\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} \right) \\ &= \left(\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \frac{1}{\tan^2 A}} \right) \\ &= \left(\frac{1 + \tan^2 A}{\frac{\tan^2 A + 1}{\tan^2 A}} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1 + \tan^2 A}{1} \times \frac{\tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

$$= \tan^2 A$$

$$\text{LHS-II} = \left(\frac{1 - \tan A}{1 - \cot A} \right)^2$$

$$= \left(\frac{1 - \tan A}{1 - \frac{1}{\tan A}} \right)^2 = \left(\frac{1 - \tan A}{\frac{\tan A - 1}{\tan A}} \right)^2$$

$$= \left(\frac{1 - \tan A}{1} \times \frac{\tan A}{\tan A - 1} \right)^2$$

$$= \left(\frac{1 - \tan A}{1} \times \frac{\tan A}{-(1 - \tan A)} \right)^2$$

$$= \left(\frac{1 - \tan A}{1} \times \frac{-\tan A}{(1 - \tan A)} \right)^2$$

$$= (-\tan A)^2$$

$$= \tan^2 A$$

प्रश्नावली – 9 त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग

1.

त्रिकोणमिति का प्रयोग होता है :

- (A) आकाशीय ग्रहों को देखने में (B) भूगोल और नौचालन में
(C) ग्रहों की प्रकृति जानने में (D) तारों की प्रकृति जानने में

Ans. (B)

2.

त्रिकोणमितीय अनुपातों की सहायता से क्या ज्ञात किया जा सकता है ?

- (A) वृक्षों की ऊँचाई (B) वस्तु की छाया की लंबाई
(C) पहाड़ की ऊँचाई (D) (A), (B) एवं (C) तीनों

Ans. (D)

3.

भूमि के किसी बिन्दु से वृक्ष की चोटी पर बैठी चिड़िया का अवलोकन करते समय नेत्र पर बना कोण कहलाता है

- (A) अवनमन कोण (B) उन्नयन कोण
(C) (A) एवं (B) दोनों (D) इनमें से कोई नहीं

Ans. (B)

4.

एक 6 मीटर ऊँचे वृक्ष की छाया 4 मीटर लम्बी है। उसी समय एक खंभे की छाया 50 मीटर लम्बी है। खंभे की ऊँचाई (मीटर में) है-

- (A) 40 (B) 25
(C) 75 (D) 10

Ans. (C)

5.

$\triangle ABC$ एक समकोण \triangle है जिसमें $\angle A = 90^\circ$ तथा $AB = 8\sqrt{3}$ cm , $AC = 8$ cm तब $\angle B = ?$

- (A) 45° (B) 60°
(C) 30° (D) कोई नहीं

Ans. (C)

6.

जब टेलिफोन स्तंभ की ऊँचाई और उसकी छाया की लंबाई का अनुपात $\sqrt{3} : 1$ है तो सूर्य का उन्नयन कोण होगा-

(A) 30°

(B) 45°

(C) 60°

(D) कोई नहीं

Ans. (C)

7.

यदि $\sqrt{3}$ m ऊँचे स्तंभ की छाया 3m है। तब छाया की अंतिम बिन्दु से चोटी का उन्नयन कोण इनमें से कौन होगा ?

(A) 30°

(B) 60°

(C) 75°

(D) कोई नहीं

Ans. (A)

8.

यदि प्रकाश की ऊँचाई 60° है तथा उनसे बनने वाले स्तंभ की छाया की लंबाई 20m हो तब स्तंभ की ऊँचाई क्या होगी ?

(A) $30\sqrt{3}$ m

(B) $20\sqrt{3}$ m

(C) $15\sqrt{3}$ m

(D) कोई नहीं

Ans. (B)

9.

किसी मीनार की ऊँचाई 10m है। जब सूर्य का उन्नयन कोण 45° हो, तो मीनार की छाया की लंबाई जमीन पर क्या होगी ?

(A) 5 m

(B) 8 m

(C) 7 m

(D) 10 m

Ans. (D)

10.

एक गुब्बारे की ऊँचाई क्या होगी यदि धागे की लंबाई 100 m है और उनका उन्नयन कोण 30° है-

(A) 50 m

(B) 100m

(C) 75m

(D) 60m

Ans. (A)

उदाहरण 1 : धरती पर एक मीनार ऊर्ध्वाधर खड़ी है। धरती के एक बिंदु से, जो मीनार के पाद-बिंदु से 15 m दूर है, मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : आइए पहले हम प्रश्न को निरूपित करने के लिए एक सरल आरेख बनाएँ (देखिए आकृति 9.4)। यहाँ AB मीनार को निरूपित करता है, CB मीनार से बिंदु की दूरी है और $\angle ACB$ उन्नयन कोण है। हम मीनार की ऊँचाई अर्थात् AB ज्ञात करना चाहते हैं और, यहाँ ACB एक त्रिभुज है जो B पर समकोण है।

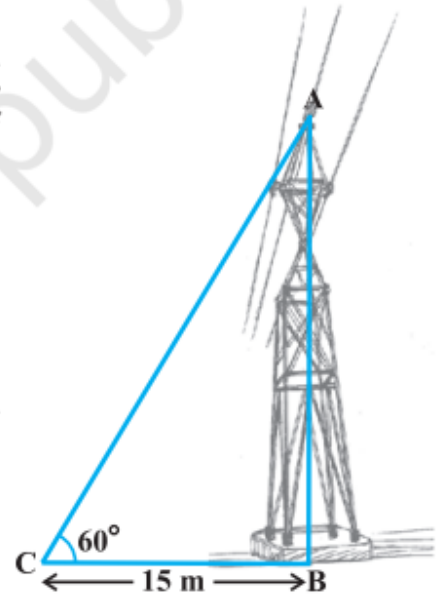
प्रश्न को हल करने के लिए हम त्रिकोणमितीय अनुपात $\tan 60^\circ$ (या $\cot 60^\circ$) लेते हैं, क्योंकि इस अनुपात में AB और BC दोनों होते हैं।

$$\text{अब} \quad \tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{अर्थात्} \quad \sqrt{3} = \frac{AB}{15}$$

$$\text{अर्थात्} \quad AB = 15\sqrt{3}$$

अतः मीनार की ऊँचाई $15\sqrt{3}$ m है।



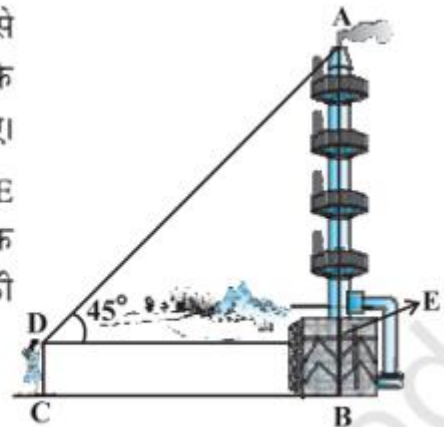
आकृति 9.4

उदाहरण 3 : 1.5 m लंबा एक प्रेक्षक एक चिमनी से 28.5 m की दूरी पर है। उसकी आँखों से चिमनी के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। चिमनी की ऊँचाई बताइए।

हल : यहाँ AB चिमनी है, CD प्रेक्षक है और $\angle ADE$ उन्नयन कोण है (देखिए आकृति 9.6)। यहाँ ADE एक त्रिभुज है जिसमें कोण E समकोण है और हमें चिमनी की ऊँचाई ज्ञात करनी है।

$$\text{यहाँ} \quad AB = AE + BE = (AE + 1.5) \text{ m}$$

$$\text{और} \quad DE = CB = 28.5 \text{ m}$$



आकृति 9.6

AE ज्ञात करने के लिए हमें एक ऐसा त्रिकोणमिति अनुपात लेना चाहिए जिसमें AE और DE दोनों हो। इसके लिए आइए हम उन्नयन कोण का tangent लें।

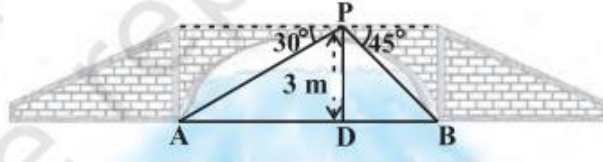
अब $\tan 45^\circ = \frac{AE}{DE}$

अर्थात् $1 = \frac{AE}{28.5}$

इसलिए $AE = 28.5$

अतः चिमनी की ऊँचाई $(AB) = (28.5 + 1.5) \text{ m} = 30 \text{ m}$

उदाहरण 7 : एक नदी के पुल के एक बिंदु से नदी के सम्मुख किनारों के अवनमन कोण क्रमशः 30° और 45° हैं। यदि पुल किनारों से 3 m की ऊँचाई पर हो तो नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।



आकृति 9.10

हल : आकृति 9.10 में, A और B नदी के सम्मुख किनारों के बिंदुओं को प्रकट करते हैं, जिससे कि AB नदी की चौड़ाई है। 3 m की ऊँचाई पर बने पुल पर एक बिंदु P है अर्थात् $DP = 3 \text{ m}$ है। हम नदी की चौड़ाई ज्ञात करना चाहते हैं जो कि ΔAPB की भुजा AB की लंबाई है।

अब $AB = AD + DB$

समकोण ΔAPD में $\angle A = 30^\circ$

अतः $\tan 30^\circ = \frac{PD}{AD}$

अर्थात् $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{AD}$ या $AD = 3\sqrt{3} \text{ m}$

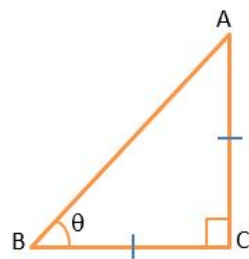
अतः समकोण ΔPBD में, $\angle B = 45^\circ$ है। इसलिए $BD = PD = 3 \text{ m}$

अब $AB = BD + AD = 3 + 3\sqrt{3} = 3(1 + \sqrt{3}) \text{ m}$

इसलिए नदी की चौड़ाई $3(\sqrt{3} + 1) \text{ m}$ है।

उदाहरण - 2) एक ऊर्ध्वाधर खंभे की ऊँचाई उसकी छाया के बराबर है। सूर्य का उन्नयन कोण ज्ञात कीजिए।

हल -



माना सूर्य का उन्नयन कोण Θ है।

AC एक ऊर्ध्वाधर खंभा है और BC इसकी छाया है।

प्रश्न के अनुसार,

ऊर्ध्वाधर खंभे की ऊँचाई (AC) = छाया की लंबाई (BC)

ΔABC में,

$$\tan \Theta = AC/BC$$

$$\tan \Theta = AC/AC = 1 \quad [\because \tan 45^\circ = 1]$$

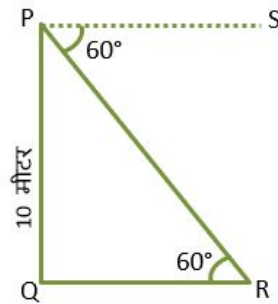
$$\tan \Theta = \tan 45^\circ$$

$$\Theta = 45^\circ$$

अतः सूर्य का उन्नयन कोण 45° है। **उत्तर**

उदाहरण – 3) 10 मीटर ऊँचे टॉवर के शीर्ष से, जमीन पर एक बिंदु का अवनमन कोण 60° है। टॉवर के आधार से बिंदु की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल –



यहां, टॉवर की ऊँचाई $PQ = 10$ मीटर

हमें दूरी QR ज्ञात करनी है।

PS एक क्षैतिज रेखा है क्योंकि अवनमन कोण, टॉवर के शीर्ष से दिया गया है।

$$\angle SPR = \angle PRQ = 60^\circ \text{ (एकान्तर कोण)}$$

ΔPQR में,

$$\tan 60^\circ = PQ/QR$$

$$\sqrt{3} = 10/QR$$

$$QR = 10/\sqrt{3}$$

$$QR = (10/\sqrt{3}) \times (\sqrt{3}/\sqrt{3}) \quad (\text{परिमेयकरण करने पर})$$

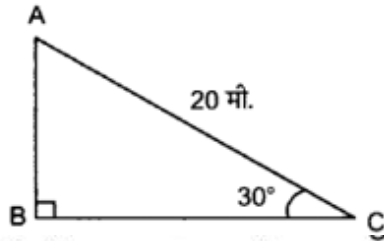
$$QR = 10\sqrt{3}/3 = 3.33 \times 1.732 \quad [\because \sqrt{3} = 1.732]$$

$$QR = 5.767 \text{ मीटर}$$

इस प्रकार टॉवर के आधार से बिंदु की दूरी 5.767 मीटर है। **उत्तर**

Q.1

सर्कस का एक कलाकार एक 20 मी. लंबी डोर पर चढ़ रहा है जो अच्छी तरह से तनी हुई है और भूमि पर सीधे लगे खंभे के शिखर से बंधा हुआ है। यदि भूमि स्तर के साथ डोर द्वारा बनाया गया कोण 30° का हो तो खंभे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



हल: आकृति में माना AC, 20 मीटर वह डोर है जिस पर सर्कस कलाकार चढ़ता है।

समकोण $\triangle ABC$ में, हमें प्राप्त है कि

$$\frac{AB}{AC} = \sin 30^\circ$$

परन्तु $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AB}{20} = \frac{1}{2} \quad [\because AC = 20 \text{ मी.}]$$

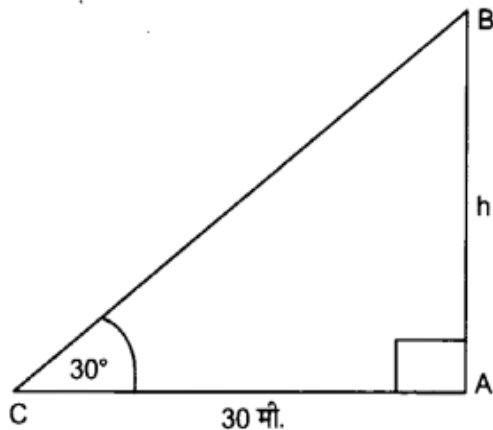
$$\Rightarrow AB = 20 \times \frac{1}{2} = 10 \text{ मी.}$$

अतः खंभे की अभीष्ट ऊँचाई **10 मी.** है।

Q.2

भूमि के एक बिंदु से, जो मीनार के पाद-बिंदु से 30 मी. की दूरी पर है, मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल:



आकृति में,

समकोण $\triangle ABC$ की भुजा $AC =$ मीनार की ऊँचाई
बिन्दु C की मीनार से दूरी $= 30$ मी.

$$\therefore AC = 30 \text{ मी.}$$

$$\text{अब, } \frac{AB}{AC} = \tan 30^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{h}{30} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \left[\because \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$$

$$\Rightarrow h = \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}$$

इस प्रकार, मीनार की अभीष्ट ऊँचाई $= 10\sqrt{3}$ मी.

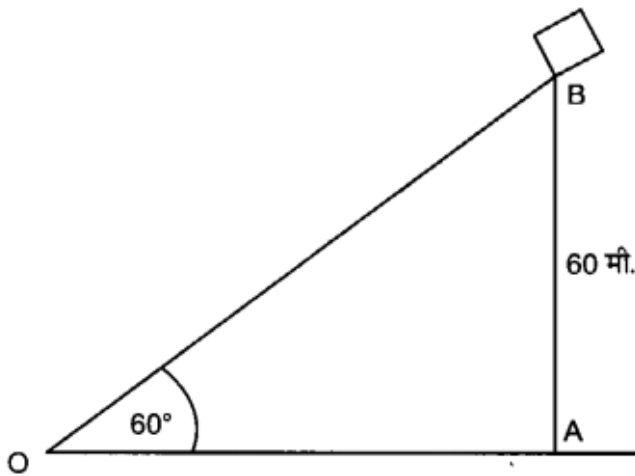
Q.3

भूमि से 60 मी. की ऊँचाई पर एक पतंग उड़ रही है। पतंग में लगी डोरी को अस्थायी रूप से भूमि के एक बिंदु से बांध दिया गया है। भूमि के साथ डोरी का झुकाव 60° है। यह मानकर कि डोरी में कोई ढील नहीं है, डोरी की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना, समकोण $\triangle AOB$ में,

$OB =$ डोरी की लम्बाई

$AB = 60$ मी. $=$ पतंग की ऊँचाई



$$\therefore \frac{OB}{AB} = \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{OB}{60} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow OB = \frac{2 \times 60}{\sqrt{3}}$$

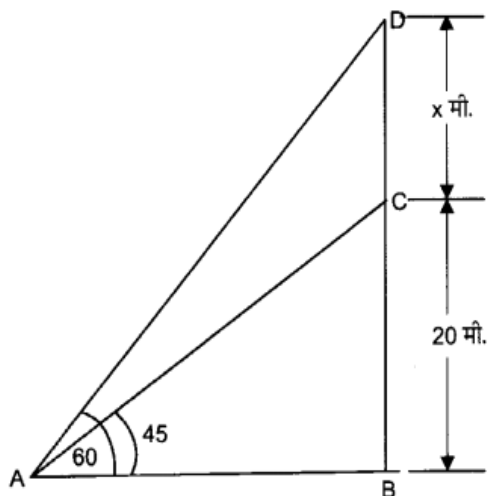
$$\Rightarrow OB = \frac{120 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = 40\sqrt{3}$$

इस प्रकार डोरी की अभीष्ट लम्बाई $40\sqrt{3}$ मी. है।

Q.4

भूमि के एक बिंदु से एक 20 मी. ऊँचे भवन के शिखर पर लगी एक संचार मीनार के तल और शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 45° और 60° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल:



आकृति में,

माना BC = भवन की ऊँचाई $\therefore BC = 20$ मी.

माना संचार मीनार की ऊँचाई = x मी.

$\therefore CD = x$ मी.

माना मीनार के तल से बिन्दु A की दूरी = y मी.

अब, समकोण $\triangle ABC$ में,

$$\frac{BC}{AB} = \tan 45^\circ = 1 \Rightarrow \frac{20}{y} = 1$$

$$\Rightarrow y = 20 \text{ मी. i.e., } AB = 20 \text{ मी.}$$

अब, समकोण $\triangle ABD$ में,

$$\frac{BD}{AB} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{20} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{20 + x}{20} = \sqrt{3} \Rightarrow 20 + x = 20\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x = 20\sqrt{3} - 20 = 20[\sqrt{3} - 1]$$

$$\Rightarrow x = 20[1.732 - 1]$$

$$\Rightarrow x = 20 \times 0.732 = 14.64$$

इस प्रकार,

संचार मीनार की अभीष्ट ऊँचाई = **14.64 मी.**

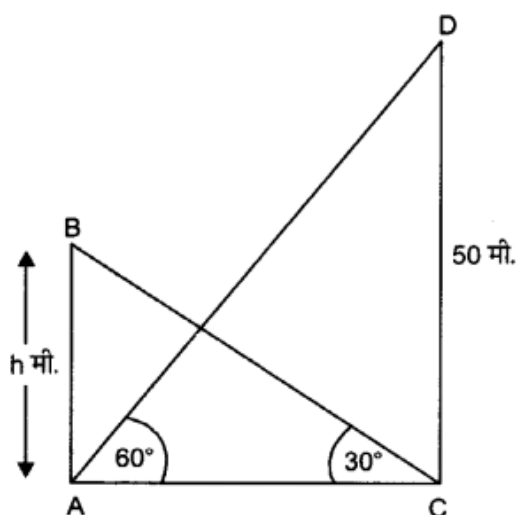
Q.5

एक मीनार के पाद-बिंदु से एक भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° है और भवन के पाद-बिंदु से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। यदि मीनार 50 मी. ऊँची हो, तो भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: आकृति में,

माना भवन की ऊँचाई = $AB = h$ मी.

और मीनार की ऊँचाई = $CD = 50$ मी.



अब, समकोण ΔABC में

$$\frac{AC}{AB} = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{h} = \sqrt{3} \Rightarrow AC = h\sqrt{3} \quad \dots(1)$$

पुनः समकोण ΔDCA में,

$$\frac{DC}{AC} = \tan 60^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{50}{AC} = \sqrt{3} \Rightarrow AC = \frac{50}{\sqrt{3}} \quad \dots(2)$$

(1) और (2) से,

$$\sqrt{3} h = \frac{50}{\sqrt{3}}$$

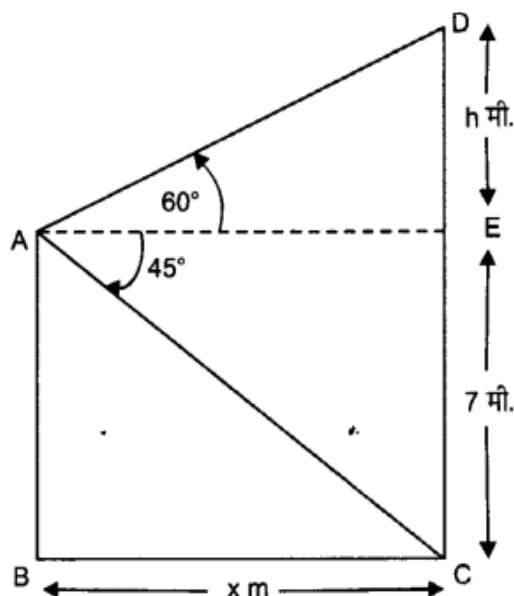
$$\Rightarrow h = \frac{50}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$$

इस प्रकार, भवन की ऊँचाई = $16\frac{2}{3}$ मी.

Q.6

7 मी. ऊँचे भवन के शिखर से एक केबल टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और इसके पाद का अवनमन कोण 45° है। टॉवर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल:



आकृति में, माना टावर AB की ऊँचाई = 7 मी.

माना केबल टॉवर CD है

अब, समकोण $\triangle DAE$ में हमें प्राप्त है,

$$\frac{DE}{EA} = \tan 60^\circ \Rightarrow \frac{h}{x} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{3} \cdot x$$

...(1)

पुनः समकोण $\triangle ABC$ में,

$$\frac{AB}{BC} = \tan 45^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{7}{x} = 1 \Rightarrow x = 7 \quad \dots(2)$$

(1) और (2) से

$$h = 7\sqrt{3} = DE$$

$$\therefore CD = CE + ED$$

$$\therefore CD = CE + ED$$

$$= 7 + 7\sqrt{3} = 7(1 + \sqrt{3}) \text{ मी.}$$

$$= 7(1 + 1.732) \text{ मी.}$$

$$= 7 \times 2.732 \text{ मी.} = 19.124 \text{ मी.}$$

इस प्रकार, केबल टॉवर की ऊँचाई **19.124 मी.** है।

प्रश्नावली – 10 वृत्त

1.

दो प्रतिच्छेदी वृत्तों की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या है-

(A) 1

(B) 2

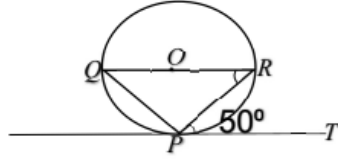
(C) 3

(D) अनगिनत

Ans. (B)

2.

दिए आकृति में PT स्पर्श रेखा है, QR एक व्यास है। $\angle RPT = 50^\circ$ तो $\angle QRP = ?$



(A) 60°

(B) 50°

(C) 70°

(D) 90°

Ans. (B)

3.

एक वृत्त की बराबर जीवाओं के मध्य बिंदुओं का बिंदुपथ निम्नलिखित में कौन होगा ?

(A) अर्द्धवृत्त

(B) सरल रेखा

(C) रेखाखंड

(D) वृत्त

Ans. (D)

4.

वृत्त के केन्द्र से समदूरस्थ जीवाएँ आपस में-

(A) असमान हैं

(B) समान हैं

(C) A और B दोनों

(D) सभी उत्तर सही हैं

Ans. (B)

5.

दो वृत्त बाह्यतः स्पर्श करे और उनकी त्रिज्याएँ 11 सेमी और 6 सेमी हैं तो दोनों वृत्तों के केंद्र के बीच की दूरी क्या होगी ?

(A) 11 सेमी

(B) 6 सेमी

(C) 17 सेमी

(D) कोई नहीं

Ans. (C)

6.

दो वृत्त एक दूसरे को बाह्यतम C पर स्पर्श करते हैं और AB वृत्तों की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा है तब $\angle ACB = ?$

(A) 60°

(B) 45°

(C) 30°

(D) 90°

Ans. (D)

7.

किसी वृत्त के केंद्र से 5 cm दूर स्थित बिन्दु A से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा की लंबाई 4 cm है, तो वृत्त की त्रिज्या है

(A) 7 cm

(B) 6 cm

(C) 3 cm

(D) 4 cm

Ans. (C)

8.

7 cm त्रिज्या वाले वृत्त के बिन्दु P से 24 cm लंबी स्पर्श रेखा PT खींची जाती है, यदि O वृत्त का केंद्र है तो OP की लंबाई है-

(A) 30 cm

(B) 28 cm

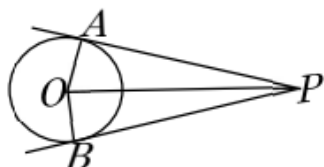
(C) 25 cm

(D) 31 cm

Ans. (C)

9.

दिए गए चित्र में यदि $\angle APO = 40^\circ$ तो $\angle AOB = ?$



(A) 100°

(B) 60°

(C) 90°

(D) 105°

Ans. (A)

10.

चक्रीय चतुर्भुज के सभी कोणों का योग होता है

(A) 180°

(B) 90°

(C) 360°

(D) कोई नहीं

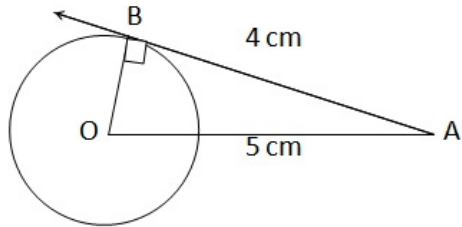
Ans. (C)

Q.1 एक बिन्दु से जो एक वृत्त के केन्द्र से 5 सेमी दूरी पर है, वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 4 सेमी. है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: बिंदु A से केन्द्र की दूरी (OA) = 5 cm

स्पर्श रेखा AB की लंबाई = 4 cm

वृत्त की त्रिज्या OB = ?



समकोण त्रिभुज AOB में, पैथागोरस प्रमेय से

$$OA^2 = OB^2 + AB^2$$

$$5^2 = OB^2 + 4^2$$

$$5^2 - 4^2 = OB^2$$

$$25 - 16 = OB^2$$

$$OB^2 = 9$$

$$OB = \sqrt{9} = 3 \text{ cm}$$

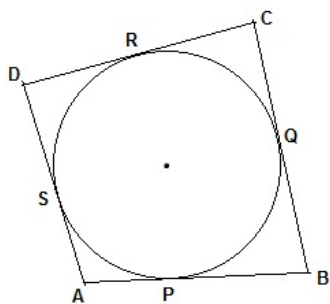
Q.2

एक वृत्त के परिगत एक चतुर्भुज ABCD खींचा गया है (देखिए आकृति 10.12) | सिद्ध कीजिए : AB + CD

= AD + BC.

दिया है : ABCD एक O केन्द्र वाले वृत्त के परिगत बना चतुर्भुज है | रेखाएँ AB, BC, CD और AD क्रमशः बिंदु P, Q, R और S पर स्पर्श करती हैं |

सिद्ध करना है : AB + CD = AD + BC



प्रमाण : P और S स्पर्श बिंदु हैं ।

अतः $AP = AS$ (i) प्रमेय 10.2 से

(बाह्य बिंदु से खिंची गई स्पर्श रेखाएँ समान लंबाई की होती हैं)

इसीप्रकार,

$$BP = BQ \quad \text{..... (ii)}$$

$$CR = CQ \quad \text{..... (iii)}$$

और $DR = DS \quad \text{..... (iv)}$

समी० (i), (ii), (iii) और (iv) जोड़ने पर

$$AP + BP + CR + DR = AS + DS + BQ + CQ$$

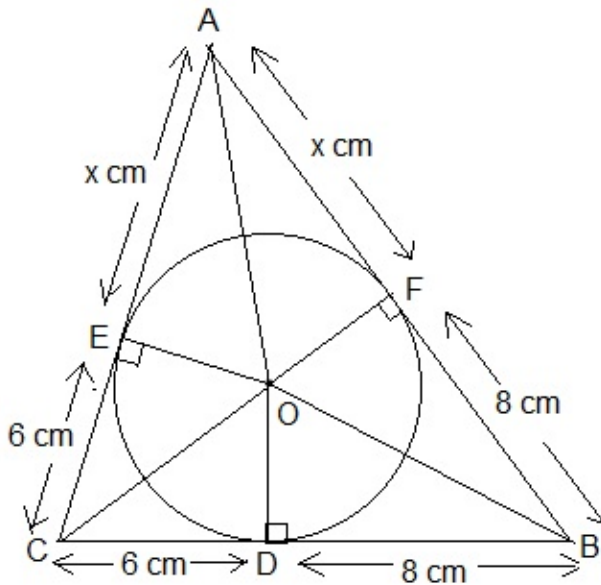
$$AB + CD = AD + BC \text{ Proved}$$

Q.3

4cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के परिगत एक त्रिभुज ABC इस प्रकार खींचा गया है की रेखाखंड BD और DC

(जिनमें स्पर्श बिन्दु D द्वारा BC विभाजित है) की लंबाई क्रमशः 8 cm और 6 cm हैं (देखिए आकृति 10.14) ।

भुजाएँ AB और AC ज्ञात कीजिए ।



हल : माना $AF = AE = x$ cm (प्रमेय 10.2 से)

इसी प्रकार $CD = CE = 6$ cm

और $BD = BF = 8$ cm

अतः $AB = 8 + x$ cm, $BC = 8 + 6 = 14$ cm और $AC = 6 + x$ cm

$OD = OF = OE = 4$ cm (त्रिज्या)

अब त्रिभुज का क्षेत्रफल हेरॉन सूत्र से

$a = 8 + x$ cm, $b = 14$ cm और $c = 6 + x$ cm

$$s = \frac{a + b + c}{2} = \frac{8+x + 14 + 6 + x}{2} = \frac{28 + 2x}{2}$$

$$s = \frac{2(14 + x)}{2} = 14 + x$$

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{(14+x)[14+x-(8+x)][14+x-14][14+x-(6+x)]}$$

$$= \sqrt{(14+x)[14+x-8-x][x][14+x-6-x]}$$

$$= \sqrt{(14+x)[6][x][8]}$$

$$= \sqrt{48x(14+x)} \text{ cm}^2 \quad \dots\dots\dots (i)$$

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \text{ar}(\triangle AOB) + \text{ar}(\triangle BOC) + \text{ar}(\triangle AOC)$$

$$= \frac{1}{2} \times AB \times OF + \frac{1}{2} \times BC \times OD + \frac{1}{2} \times AC \times OE$$

$$= \frac{1}{2} (AB \times OF + BC \times OD + AC \times OE)$$

$$= \frac{1}{2} (8 + x \times 4 + 14 \times 4 + 6 + x \times 4)$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 (8 + x + 14 + 6 + x)$$

$$= 2(28 + 2x) \text{ cm}^2 \quad \dots\dots\dots (ii)$$

समीकरण (i) और (ii) से चूँकि दोनों त्रिभुज ABC के क्षेत्रफल हैं ।

$$\sqrt{48x(14+x)} \text{ cm}^2 = 2(28 + 2x) \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow 48x(14 + x) = [2(28 + 2x)]^2$$

$$\Rightarrow 48x(14 + x) = [4(14 + x)]^2$$

$$\Rightarrow 48x(14 + x) = [4 \times 4 (14 + x)(14 + x)]$$

$$\Rightarrow 48x = 16 (14 + x) \text{ सरल करने पर}$$

$$\Rightarrow 3x = (14 + x) \text{ सरल करने पर}$$

$$\Rightarrow 3x - x = 14$$

$$\Rightarrow 2x = 14$$

$$\Rightarrow x = 7$$

अतः भुजाएँ AB = 8 + 7 = 15 cm और AC = 6 + 7 = 13 cm

Q.4

(i) किसी वृत्त की स्पर्श रेखा उसे बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है।

(ii) वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा को कहते हैं।

(iii) एक वृत्त की समांतर स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं।

(iv) वृत्त तथा उसकी स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिन्दु को कहते हैं।

उत्तर:

(i) एक

(ii) जीवा

(iii) दो

(iv) स्पर्श बिंदु

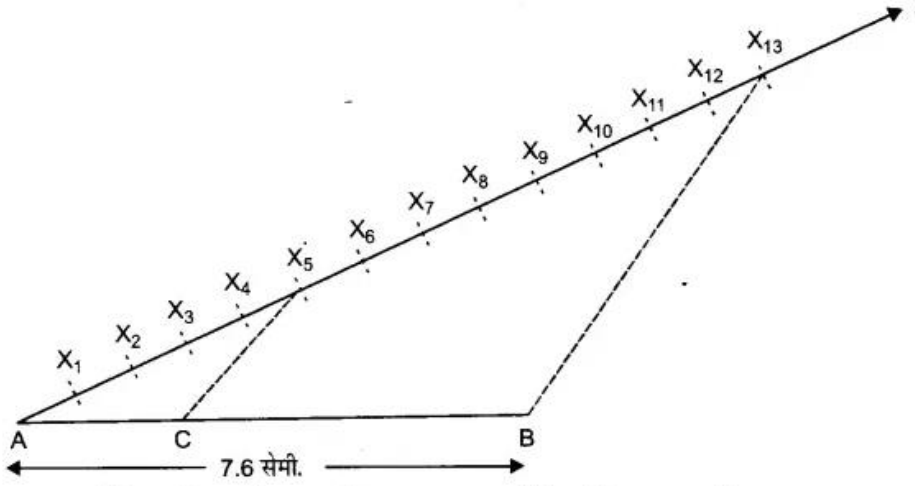
प्रश्नावली – 11 रचनाएँ

1. वह वृत्त जो किसी त्रिभुज की सब भुजाओं को बिना बढ़ाये स्पर्श करे, कहलाता है—
(A) वृत्त (B) परिगत वृत्त (C) अन्तर्वृत्त (D) बहिवृत्त (C)
2. वृत्त के बाहर स्थित बिन्दु से खींची गई स्पर्श रेखाओं की संख्या हो सकती है।
(A) 2 (B) 3 (C) शून्य (D) 4 (A)
3. ऐसी ज्यामितीय आकृतियाँ जिनका रूप समान है, परन्तु जरूरी नहीं कि आकार भी समान हो, आकृतियाँ कहलाती हैं। – समरूप
4. वह बिन्दु जिस पर स्पर्श रेखा वृत्त को स्पर्श करती है, बिन्दु कहलाता है। – स्पर्श
5. यदि दो वृत्तों का केन्द्र एक हो तथा विभिन्न त्रिज्याएँ हों, वृत्त कहलाते हैं। – संकेन्द्रिय
6. दो वृत्त बाह्यतः स्पर्श करते हैं। यदि दोनों वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 5 सेमी तथा 3 सेमी हों तो उनके केन्द्रों के बीच की दूरी होगी – 8 सेमी
7. 7.5 सेमी लम्बे रेखाखण्ड को 2 अनुपात 1 में विभाजित करने पर बड़ भाग की लम्बाई ——— सेमी होगी। – 5 सेमी

Q.1 7.6 सेमी. लंबा एक रेखाखंड खींचिए और इसे 5:8 अनुपात में विभाजित कीजिए। दोनों को मापिए।

हल: रचना के पद

- I. एक रेखाखंड $AB = 7.6$ सेमी खींचो।
- II. एक किरण AX खींचो जो AB के साथ एक न्यून कोण बनाए।
- III. किरण AX पर $(8 + 5) = 13$ समान खंड काटो और उन्हें $X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_{13}$ से अंकित करो।
- IV. X_{13} को B से मिलाओ।
- V. X_5 से $X_6C \parallel X_{13}B$ खींचो जो AB को C पर मिले।



इस प्रकार बिन्दु C रेखाखंड AB को 5 : 8 अनुपात में विभाजित करता है।
दोनों रेखाखंडों को मापने पर, हमें प्राप्त होता है AC = 4.7 सेमी., BC = 2.9 सेमी

इस प्रकार बिन्दु C रेखाखंड AB को 5 : 8 अनुपात में विभाजित करता है।
दोनों रेखाखंडों को मापने पर, हमें प्राप्त होता है AC = 4.7 सेमी., BC = 2.9 सेमी

सत्यापन: $\triangle ABX_{13}$ और $\triangle ACX_5$ में हमें प्राप्त होता है:

$$C_5 \parallel B_{13}$$

$$\therefore \frac{AC}{CB} = \frac{A_5}{X_5 X_{13}} = \frac{5}{8}$$

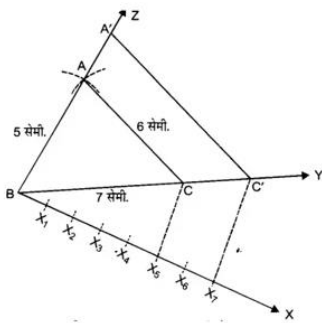
$$\Rightarrow AC : CB = 5 : 8.$$

Q 2

5 cm, 6cm और 7cm भुजाओं वाले एक त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की 7/5 गुनी हो।

रचना के पद

1. एक त्रिभुज ABC की रचना इस प्रकार कीजिए जिसमें AB = 5 सेमी., BC = 7 सेमी. और AC = 6 सेमी. है।



- II. एक किरण BX इस प्रकार खींचो की $\angle CBX$ एक न्यून कोण हो।
- III. BX पर 7 बिन्दु $X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_7$ अंकित करो।
- IV. X_5 और C को मिलाओ।
- V. बिन्दु X_7 से $X_5C \parallel X_7C'$ खींचो जो BC (बढ़ाने पर) को C पर काटे।
- VI. C' से CA के समान्तर एक रेखा खींचो जो BA (बढ़ाने पर) को A' पर काटे।

इस प्रकार $\triangle ABC$ अभीष्ट त्रिभुज है।

सत्यापन: रचना से, हमें प्राप्त होता है कि

$$C'A' \parallel CA$$

AA' समरूपता से हमें प्राप्त होता है:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

$$\frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} \text{ तथा } X_7C' \parallel X_5C$$

[रचना द्वारा]

$$\therefore \triangle BX_7C' \sim \triangle BX_5C \Rightarrow \frac{BC}{BC'} = \frac{BX_5}{BX_7}$$

$$\therefore \frac{BX_5}{BX_7} = \frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{BC'} = \frac{5}{7} \text{ or } \frac{BC'}{BC} = \frac{7}{5}$$

$$\therefore \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{7}{5}$$

Q 3

6 cm त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। केन्द्र से 10 cm दूरी स्थित एक बिन्दु से वृत्त पर स्पर्श रेखा युग्म की रचना कीजिए और उनकी लंबाईयाँ मापिए।

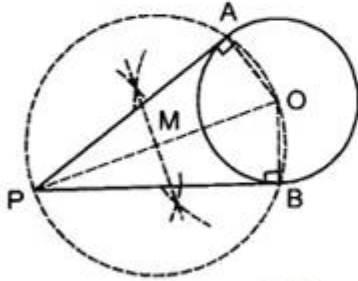
हल:

रचना के पद

- I. एक बिन्दु O अंकित करो।
- II. केन्द्र O और त्रिज्या 6 सेमी से एक वृत्त खींचो।
- III. केन्द्र से 10 सेमी की दूरी पर एक बिन्दु P अंकित करो।
- IV. O और P को मिलाओ।
- V. OP को M पर समद्विभाजित करो।

VI. बिन्दु M को केन्द्र लेकर MO या MP के समान त्रिज्या से एक वृत्त खींचो जो दिए गये वृत्त को A और B पर काटे।

VII. PA और PB को मिलाओ। इस प्रकार, PA और PB दो अभिष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं। मापने पर, $PA = PB = 9.6$ सेमी.



सत्यापन: OA और OB को मिलाओ चूँकि OP एक व्यास है।

$\angle OAP = 90^\circ$; $\angle OBP = 90^\circ$ [अर्धवृत्त में बने कोण]

पुनः OA और OB एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।

PA और PB वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ हैं।

Q. 4

3 cm त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। इसके किसी भी बढ़ाए गए व्यास पर केंद्र से 7 cm की दूरी पर स्थित दो बिन्दु P और Q लीजिए। इन दोनों बिन्दुओं से वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ खींचिए।

हल:

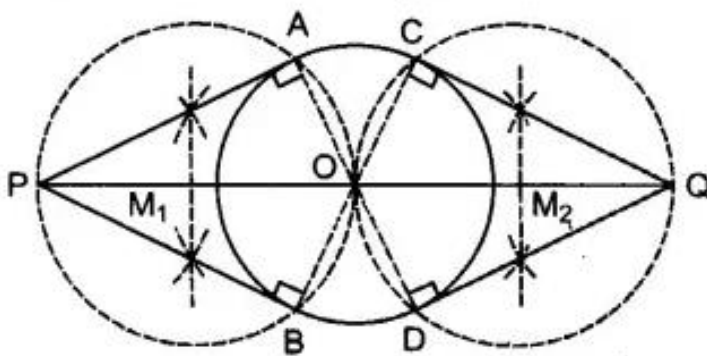
रचना के पद

I. केन्द्र O और त्रिज्या 3 सेमी का एक वृत्त खींचो।

II. उक्त वृत्त के व्यास को बढ़ाकर, इस पर दो बिन्दु P और Q इस प्रकार अंकित कीजिए कि:

$OP = OQ = 7$ सेमी

III. OP और OQ के मध्य बिन्दु क्रमशः M_1 और M_2 ज्ञात कीजिए।



IV. M_1 को केन्द्र व M_1P को त्रिज्या मानकर एक वृत्त खींचो जो वृत्त को A और B पर काटे।

V. PA और PB को मिलाओ। PA और PB अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।

VI. अब OQ के मध्य बिन्दु M_2 और M_2O के समान त्रिज्या लेकर वृत्त खींचो जो दिए गये वृत्त को C और D पर काटे।

VII. OC और OD को मिलाओ। इस प्रकार OQ और QD अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।

सत्यापन: OA को मिलाओ।

$$\angle OAP = 90^\circ$$

$$PA \perp OA$$

PA एक स्पर्श रेखा है।

इस प्रकार, $PB \perp OA$

PB एक स्पर्श रेखा है।

अब, OC को मिलाने पर

$$\angle OCQ = 90^\circ$$

$$QC \perp OC$$

QC एक स्पर्श रेखा है।

इसी प्रकार, $QD \perp OC = QD$ एक स्पर्श रेखा है।

12. वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

2.

1. अर्द्धवृत्त का कोण होता है

- (A) 90°
- (B) 180°
- (C) 120°
- (D) 60°

A

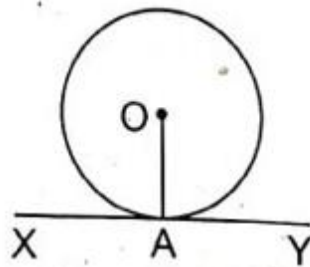
2.

वह रेखा जो वृत्त से एक और केवल एक ही बिन्दु पर मिलती है, कहलाती है

- (A) त्रिज्या
- (B) छेदक रेखा
- (C) स्पर्श रेखा
- (D) इनमें कोई नहीं [उत्तर : (C)]

3.

वृत्त के किसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा तथा स्पर्श बिन्दु से होकर जाने वाली त्रिज्या के बीच बना कोण होता है

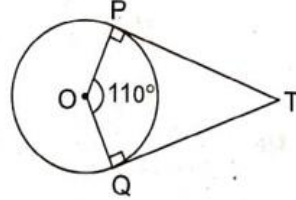


- (A) 30°
- (B) 45°
- (C) 60°
- (D) 90°

[उत्तर : (D)]

4-

यदि TP और TQ केन्द्र O वाले किसी वृत्त पर खींची गई दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार हैं कि $\angle POQ = 110^\circ$ तो $\angle PTQ$ बराबर है



(A) 60°

(B) 70°

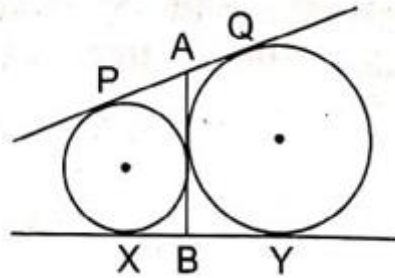
(C) 80°

(D) 90°

[उत्तर : (B)]

5.

यदि दो वृत्त एक-दूसरे को बाह्यतः स्पर्श करे तो उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ की संख्या होगी



(A) 1

(B) 2

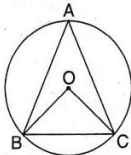
(C) 3

(D) 4

[उत्तर : (C)]

6. दिए गए चित्र में O वृत्त का केन्द्र है तथा $\angle BAC = 60^\circ$ तो

$\angle OBC =$



(A) 120°

(B) 60°

(C) 40°

(D) 30°

[उत्तर : (D)]

Q.1

किसी कार के प्रत्येक पहिये का व्यास 80 cm है | यदि यह कार 66 km प्रति घंटे की चाल से चाल रही है, तो 10 मिनट में प्रत्येक पहिया कितने चक्कर लगाती है ?

हल :

$$\text{पहिये का व्यास} = 80 \text{ cm}$$

$$\text{पहिये की त्रिज्या (r)} = 40 \text{ cm}$$

$$\text{कार की चाल} = 66 \text{ km प्रति घंटा}$$

$$= \frac{66 \times 1000}{60} \text{ m प्रति मिनट}$$

$$= 1100 \text{ m प्रति मिनट}$$

$$10 \text{ मिनट में तय दूरी} = 1100 \text{ m} \times 10$$

$$= 11000 \text{ m}$$

$$\text{अब, एक चक्कर में तय दूरी} = 2 \pi r$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 40$$

$$= \frac{1760}{7} \text{ cm}$$

$$\text{या} = \frac{1760}{700} \text{ m}$$

$$\text{अतः 10 मिनट में चक्करों की संख्या} = \frac{10 \text{ मिनट में तय दूरी}}{1 \text{ चक्कर में तय दूरी}}$$

$$= \frac{11000}{\frac{1760}{700}}$$

$$\text{या} = \frac{11000}{1} \times \frac{700}{1760} \text{ चक्कर}$$

$$\text{या} = \frac{1000}{1} \times \frac{700}{160}$$

$$\text{या} = \frac{100}{1} \times \frac{700}{16}$$

$$\text{या} = \frac{100}{1} \times \frac{700}{4 \times 4}$$

$$\text{या} = 25 \times 25 \times 7$$

$$\text{या} = 625 \times 7$$

$$\text{या} = 4375 \text{ चक्कर}$$

Q.2

6 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के एक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कोण 60° है।

हल :

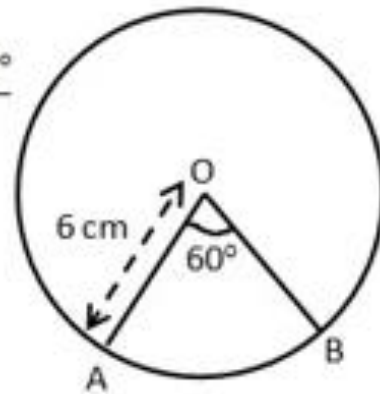
त्रिज्या (r) = 6 cm और कोण $\theta = 60^\circ$

$$\text{त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल} = \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ}$$

$$\text{या} = \frac{22}{7} \times \frac{6 \times 6 \times 60^\circ}{360^\circ}$$

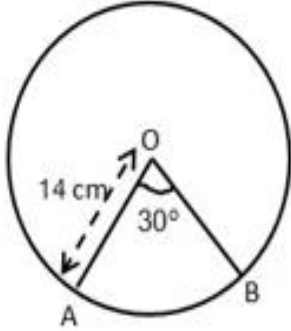
$$\text{या} = \frac{22}{7} \times \frac{6}{1}$$

$$\text{या} = \frac{132}{7} \text{ cm}^2$$



Q.3 एक घड़ी की मिनट की सुई जिसकी लंबाई 14 cm है | इस सुई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

हल :



त्रिज्या (r) = मिनट की सुई जिसकी लंबाई = 14 cm

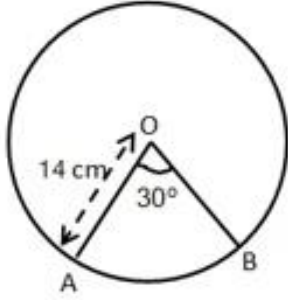
घड़ी के सुई द्वारा 1 मिनट में बना कोण = $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$

इसलिए 5 मिनट में बना केन्द्रीय कोण $\theta = 6^\circ \times 5 = 30^\circ$

5 मिनट में रचित क्षेत्रफल = $\frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ}$

Q.4 एक घड़ी की मिनट की सुई जिसकी लंबाई 14 cm है | इस सुई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

हल :



त्रिज्या (r) = मिनट की सुई जिसकी लंबाई = 14 cm

घड़ी के सुई द्वारा 1 मिनट में बना कोण = $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$

इसलिए 5 मिनट में बना केन्द्रीय कोण $\theta = 6^\circ \times 5 = 30^\circ$

5 मिनट में रचित क्षेत्रफल = $\frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ}$

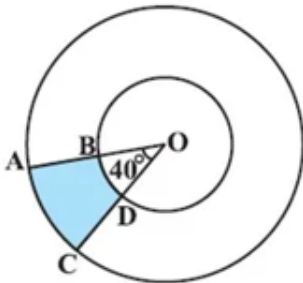
या $= \frac{22}{7} \times \frac{14 \times 14 \times 30^\circ}{360^\circ}$

या $= \frac{22}{1} \times \frac{2 \times 14}{12}$

या $= \frac{11}{1} \times \frac{14}{3} \text{ cm}^2$

या $= \frac{154}{3} \text{ cm}^2$

Q.5 आकृति में छायांकित का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि केंद्र वाले संकेन्द्रिय वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 7 सेमी और 14 सेमी. है तथा $\angle AOC = 40^\circ$ है।



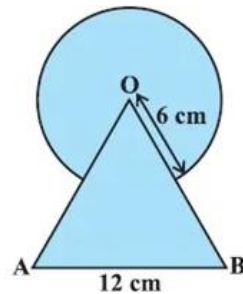
हल : संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः R = 14 cm और r = 7 cm $\angle AOC = 40^\circ$

छायांकित भाग का क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड AOC का क्षेत्रफल - त्रिज्यखंड BOD का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi R^2 \theta}{360^\circ} - \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ} \\
&= \frac{\pi \times \theta}{360^\circ} (R^2 - r^2) \\
&= \frac{22 \times 40}{7 \times 360^\circ} (14^2 - 7^2) \\
&= \frac{22}{7 \times 9} (14 + 7)(14 - 7) \\
&= \frac{22}{7 \times 9} (21)(7) \\
&= \frac{22 \times 7}{3} = \frac{154}{3} \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

Q.6

आकृति 12.22 में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ भुजा 12 cm वाले एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष O को केंद्र मान कर 6 सेमी त्रिज्या वाला एक वृत्तीय चाप खींचा गया है।



हल : समबाहु त्रिभुज की भुजा (a) = 12 cm

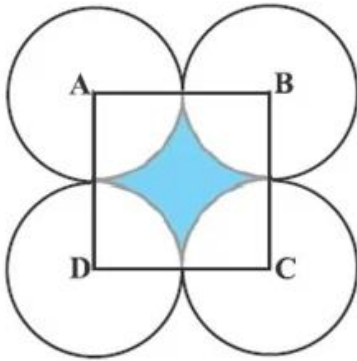
वृत्त की त्रिज्या (r) = 6 cm और $\angle AOB = 60^\circ$ [समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण]

छायांकित भाग का क्षेत्रफल = ΔAOB का क्षेत्रफल + दीर्घ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + \frac{\pi r^2 (360 - \theta)}{360^\circ} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 12 \times 12 + \frac{22 \times 6 \times 6 (360^\circ - 60^\circ)}{7 \times 360^\circ}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{3} \times 3 \times 12 + \frac{22 \times 6 \times 6 (300^\circ)}{7 \times 360^\circ} \\
&= 36\sqrt{3} + \frac{22 \times 30}{7} \\
&= 36\sqrt{3} + \frac{660}{7} \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

Q.7 आकृति 12.25 में, ABCD भुजा 14 cm वाला एक वर्ग है | A,B,C और D को केंद्र मानकर, चार वृत्त इस प्रकार खींचे गए हैं कि प्रत्येक वृत्त तीन शेष वृत्तों में से दो वृत्तों को बाह्य रूप से स्पर्श करता है | छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |



हल:

वर्ग ABCD की एक भुजा = 14 cm

$$\text{अतः वृत्त के चतुर्थांश की त्रिज्या} = \frac{14}{2} = 7 \text{ cm}$$

अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल = वर्ग का क्षेत्रफल - 4 (चतुर्थांश का क्षेत्रफल)

$$= \text{भुजा} \times \text{भुजा} - 4 \times \frac{1}{4} \pi r^2$$

$$= \text{भुजा} \times \text{भुजा} - \pi r^2$$

$$= 14 \times 14 - \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$

$$= 196 - 154 = 42 \text{ cm}^2$$

13 – पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

1.

यदि घन की एक भुजा a cm हो तो विकर्ण की लम्बाई होगी

(A) $\sqrt{2}a$

(B) $\sqrt{3}a$

(C) $4a^2$

(D) $6a^2$

[उत्तर : (B)]

2.

समान आधार और समान ऊँचाई वाले लंबवृत्तीय बेलन और लंबवृत्तीय शंकु के आयतनों का अनुपात कितना होगा?

(A) 1:3

(B) 3:1

(C) 1:9

(D) 9:1

[उत्तर : (B)]

3.

एक शंकु की ऊँचाई 24 cm, आधार की त्रिज्या 6 cm है। शंकु का आयतन होगा [2017 (A)]

(A) 288π

(B) 188π

(C) 100π

(D) 90π

[उत्तर : (A)]

4.

r त्रिज्या वाले अर्द्धगोले का आयतन है

(A) $\frac{2}{3} \pi r^3$

(B) $\frac{4}{3} \pi r^3$

(C) $\frac{1}{3} \pi r^3$

(D) इनमें कोई नहीं [उत्तर : (A)]

5.

समान आधार और समान ऊँचाई वाले बेलन तथा अर्द्धगोले के आयतन का अनुपात है

(A) 1:3

(B) 3:1

(C) 3:2

(D) 2:3

[उत्तर : (C)]

6.

एक 8 सेमी त्रिज्या के सीसे के ठोस गोले से 1 सेमी त्रिज्या के कितने ठोस गोले बनाये जा सकते हैं [2018 (A)]

(A) 256

(B) 512

(C) 1024

(D) 576

[उत्तर : (B)]

7-

7 cm त्रिज्या वाले अर्द्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल है

(A) $49\pi \text{ cm}^2$

(B) $98\pi \text{ cm}^2$

(C) $147\pi \text{ cm}^2$

(D) इनमें कोई नहीं [उत्तर : (C)]

8-

यदि गोले की त्रिज्या आधी कर दी जाए तो मूल गोले और नये गोले के आयतनों का अनुपात होगा

(A) 1:4

(B) 4:1

(C) 1:8

(D) 8:1

[उत्तर : (D)]

9.

किसी घन के एक किनारा और विकर्ण की लम्बाई का अनुपात है

(A) $1:\sqrt{3}$

(B) $\sqrt{3}:1$

(C) 1:2

(D) 2:1

[उत्तर : (A)]

Q.1

Q1. दो घनों, जिनमें से प्रत्येक का आयतन 64 cm^3 है, के सलंगन फलकों को मिलाकर एक ठोस बनाया जाता है। इससे प्राप्त घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

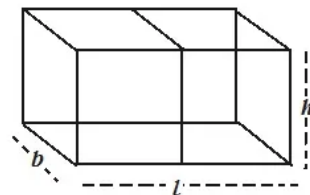
हल:

एक घन का आयतन = 64 cm^3

एक किनारा = $(64)^{1/3}$

= 4 cm

दो घनों के फलकों को मिलाने पर



$$l = 4 + 4 = 8 \text{ cm}$$

$$b = 4 \text{ cm}$$

$$h = 4 \text{ cm}$$

इसप्रकार इस घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2(lb + bh + lh)$

$$= 2(8 \times 4 + 4 \times 4 + 8 \times 4)$$

$$= 2(32 + 16 + 32)$$

$$= 2 \times 80$$

$$= 160 \text{ cm}^2$$

अतः इस घनाभ का प्राप्त पृष्ठीय क्षेत्रफल 160 cm^2 है ।

Q.2

भुजा 7 cm वाले एक घनाकार ब्लॉक के ऊपर एक अर्धगोला रखा हुआ है । अर्धगोले का अधिकतम व्यास क्या हो सकता है ? इस प्रकार बने ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

हल :

घनाकार ब्लॉक का एक किनारा = 7 cm

अर्धगोले का अधिकतम व्यास $d = 7 \text{ cm}$

$$\therefore \text{त्रिज्या } r = \frac{7}{2} \text{ cm}$$

ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल = घनाकार ब्लॉक का क्षेत्रफल + अर्धगोले का क्षेत्रफल - अर्धगोले से ढके एक वृत्त का क्षेत्रफल

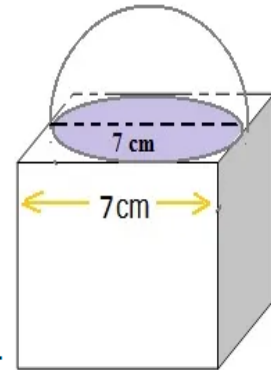
$$\Rightarrow \text{ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 6a^2 + 2\pi r^2 - \pi r^2$$

$$= 6a^2 + \pi r^2 \quad [a = \text{घन का एक किनारा}]$$

$$= 6(7)^2 + \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$$

$$= 6 \times 49 + \frac{77}{2}$$

$$= 294 + 38.5 = 332.5 \text{ cm}^2$$



Q.3

दवा का एक कैप्सूल (capsule) एक बेलन के आकार का है जिसके दोनों सिरों पर एक - एक अर्धगोला लगा हुआ है (देखिए आकृति 13.10) | पुरे कैप्सूल की लंबाई 14 mm है और उसका व्यास 5 mm है इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए |

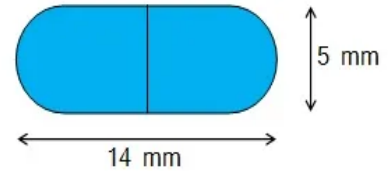
हल :

यहाँ बेलन का व्यास, अर्धगोले के व्यास के बराबर है |

अतः अर्धगोले का व्यास $D = 5 \text{ mm}$

इसलिए, त्रिज्या $r = \frac{5}{2} \text{ mm}$

और बेलन का व्यास $d = 5 \text{ mm}$



\therefore त्रिज्या $r = \frac{5}{2} \text{ mm}$

बेलन की ऊँचाई $h =$ कैप्सूल की लंबाई $- 2r$

$h = 14 \text{ mm} - 5$ [चूँकि $2r = D$]

$= 9 \text{ mm}$

कैप्सूल का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2 (अर्धगोलों का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल) + बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2 \times 2\pi r^2 + 2\pi rh$

$= 2\pi r(2r + h)$

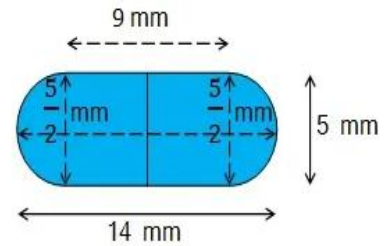
$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{5}{2} (5 + 9)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{5}{2} \times 14$

$= 2 \times 22 \times 5$

$= 220 \text{ mm}^2$

कैप्सूल का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 220 mm^2



Q.4

एक गुलाबजामुन में उसके आयतन की लगभग 30% चीनी की चाशनी होती है | 45 गुलाबजामुन एक बेलन के आकार का है, जिसके दोनों सिरे अर्धगोलाकार हैं तथा इसकी लंबाई 5 cm और व्यास 2.8 cm है (देखिए आकृति 13.15) |

हल :

अर्धगोलाकार सिरे का व्यास = 2.8 cm

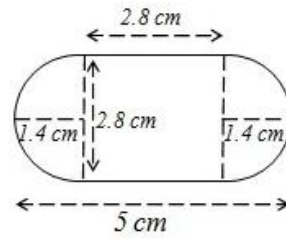
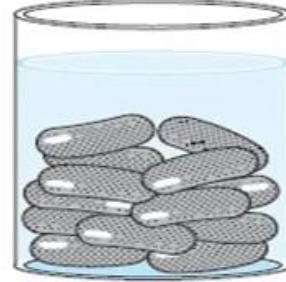
तो अर्धगोलाकार सिरे की त्रिज्या $r = 1.4$ cm

पूरे गुलाब जामुन की लम्बाई $l = 5$ cm

तो बेलनाकार भाग की लम्बाई $h = 5 - (1.4 + 1.4)$

$$= 5 - 2.8 \text{ cm}$$

$$= 2.2 \text{ cm}$$



सभी 45 गुलाब जामुनों का आयतन = 45(अर्धगोले का आयतन + बेलन का आयतन + अर्धगोले का आयतन)

$$= 45 \left(\frac{2}{3} \pi r^3 + \pi r^2 h + \frac{2}{3} \pi r^3 \right)$$

$$= 45 \pi r^2 \left(\frac{2}{3} r + h + \frac{2}{3} r \right)$$

$$= 45 \left[\frac{22}{7} (1.4)^2 \left(\frac{2}{3} \times 1.4 + 2.2 + \frac{2}{3} \times 1.4 \right) \right]$$

$$= 45 \left[\frac{22}{7} \times \frac{14}{10} \times \frac{14}{10} \left(\frac{2.8}{3} + 2.2 + \frac{2.8}{3} \right) \right]$$

$$= 45 \left[\frac{44 \times 14}{100} \left(\frac{5.6}{3} + 2.2 \right) \right]$$

$$= 45 \left[\frac{616}{100} \left(\frac{5.6 + 6.6}{3} \right) \right]$$

$$= 45 \left[\frac{616}{100} \left(\frac{12.2}{3} \right) \right]$$

$$= \frac{15 \times 616 \times 122}{1000}$$

$$= \frac{1127280}{1000}$$

$$= 1127.280 \text{ cm}^3$$

चासनी की मात्रा = 1127.280 cm^3 का 30%

$$= 1127.280 \times \frac{30}{100}$$

$$= 1127.280 \times \frac{30}{100}$$

$$= 338.1840 \text{ cm}^3$$

अतः 45 गुलाब जामुनों में चासनी की मात्रा 338 cm^3 है ।

Q.5

क्रमशः 6 cm, 8 cm और 10 cm त्रिज्याओं वाले धातु के ठोस गोलों को पिघलाकर एक बड़ा ठोस गोला बनाया जाता है । इस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए ।

हल : माना बड़े ठोस गोले की त्रिज्या = R cm

दिया है : $r_1 = 6 \text{ cm}$, $r_2 = 8 \text{ cm}$ और $r_3 = 10 \text{ cm}$

$$\text{बड़े गोले का आयतन} = \frac{4}{3} \pi (r_1)^3 + \frac{4}{3} \pi (r_2)^3 + \frac{4}{3} \pi (r_3)^3$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \pi (R)^3 = \frac{4}{3} \pi [(r_1)^3 + (r_2)^3 + (r_3)^3]$$

दोनों तरफ सरल करने पर हम पाते हैं -

$$\Rightarrow (R)^3 = [(r_1)^3 + (r_2)^3 + (r_3)^3]$$

$$\Rightarrow (R)^3 = [(6)^3 + (8)^3 + (10)^3]$$

$$\Rightarrow (R)^3 = [216 + 512 + 1000]$$

$$\Rightarrow (R)^3 = 1728$$

$$\Rightarrow R = \sqrt[3]{1728}$$

$$\Rightarrow R = 12$$

अतः नए गोले की त्रिज्या 12 cm है ।

Q.6

एक किसान अपने खेत में बनी 10 m व्यास वाली और 2 m गहरी एक बेलनाकार टंकी को आंतरिक व्यास 20 cm वाले एक पाइप द्वारा एक नहर से जोड़ता है । यदि पाइप में पानी 3 km/h की चाल से बह रहा है, तो कितने समय बाद टंकी पूरी भर जाएगी?

हल : टंकी का व्यास = 10 m

टंकी की त्रिज्या = 5 m

टंकी की गहराई h = 2 m

पाइप का व्यास = 20 cm

पाइप की त्रिज्या = 10 cm = 0.1 m

1 घंटे में पाइप की लम्बाई = 3 km = 3000 m

अब पाइप में 1 घंटे में पानी का आयतन = $\pi r^2 h$

$$= \pi \times 0.1 \times 0.1 \times 3000$$

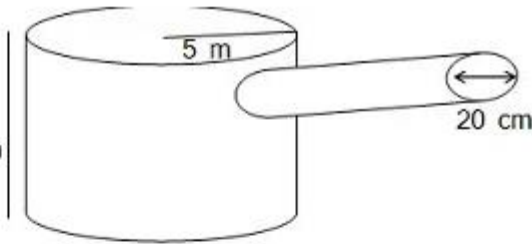
$$= \pi \times 30 \text{ m}^3$$

टंकी में भरे जा सकने वाले पानी का आयतन = $\pi r^2 h$

$$= \pi \times 5 \times 5 \times 2$$

टंकी भरने में लगा समय = $\frac{\text{टंकी का आयतन}}{\text{1 घंटे में पाइप में पानी}}$

$$= \frac{\pi \times 5 \times 5 \times 2}{\pi \times 30}$$



$$= \frac{5 \times 5}{15}$$

$$= \frac{5}{3} \text{ घंटा}$$

$$\text{मिनट में लगा समय} = \frac{5}{3} \times 60 = 5 \times 20 = 100 \text{ मिनट}$$

Q.7

पानी पीने वाला एक गिलास 14 cm ऊँचाई वाले एक शंकु के छिन्नक के आकार का है। दोनों वृत्ताकार सिरे के व्यास 4 cm और 2 cm हैं। इस गिलास की धारिता ज्ञात कीजिए।

हल : छिन्नक वाले गिलास की ऊँचाई = 14 cm

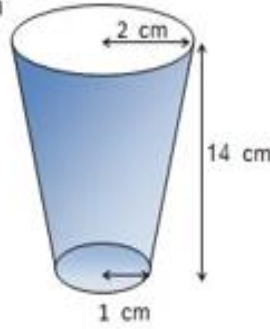
उपरी सिरे का व्यास = 4 cm

उपरी सिरे की त्रिज्या R = 2 cm

निचली सिरे का व्यास = 2 cm

निचली सिरे की त्रिज्या r = 1 cm

$$\text{गिलास की धारिता} = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr)$$



$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 (2^2 + 1^2 + 2 \times 1)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{1} \times 2 (4 + 1 + 2)$$

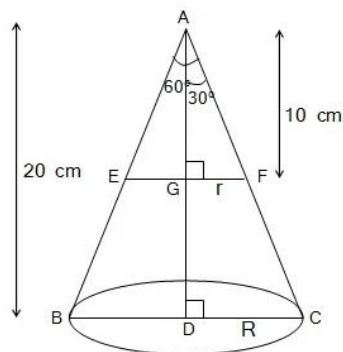
$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{1} \times 14$$

$$= \frac{308}{3} = 102\frac{2}{3} \text{ cm}^3$$

Q.8

20 cm ऊँचाई और शीर्ष कोण (vertical angle) 60° एक शंकु को उसकी ऊँचाई के बीचों बीच से होकर जाते हुए एक ताल से दो भागों में काटा गया है, जबकि काटा गया तल शंकु के आधार के समांतर है। यदि इस प्राप्त शंकु के छिन्नक को व्यास $1/16$ cm वाले एक तार के रूप में बदल दिया जाता है तो तार की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल :



हल : दिया है :

$$AD = 20 \text{ cm}$$

तो $AG = 10 \text{ cm}$ (बीचों बीच से काटा गया है)

$$\angle BAC = 60^\circ$$

AD $\angle BAC$ को समद्विभाजित करता है।

$$\text{इसलिए, } \angle CAD = 30^\circ$$

समकोण $\triangle AGF$ में,

$$\tan 30^\circ = \frac{r}{AG}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r}{10}$$

$$\Rightarrow r = \frac{10}{\sqrt{3}} \quad \dots\dots\dots (i)$$

इसीप्रकार, समकोण $\triangle ADC$ में,

$$\tan 30^\circ = \frac{R}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{R}{20}$$

$$\Rightarrow R = \frac{20}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots (i)$$

माना तार की लंबाई H है ।

$$\text{त्रिज्या} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{32} \text{ cm}$$

तार का आयतन = प्राप्त छिन्नक का आयतन

$$\Rightarrow \pi r^2 H = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{32}\right)^2 H = \frac{1}{3} \times 10 \left[\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{32}\right)^2 H = \frac{1}{3} \times 10 \left[\frac{400}{3} + \frac{100}{3} + \frac{200}{3}\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{32}\right)^2 H = \frac{1}{3} \times 10 \times \frac{700}{3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{32}\right)^2 H = \frac{7000}{9}$$

$$\Rightarrow H = \frac{7000}{9} \times \frac{32}{1} \times \frac{32}{1} \text{ cm}$$

$$H = \frac{7168000}{9} \times \frac{1}{100} \text{ m}$$

$$H = \frac{71680}{9} \text{ m}$$

$$H = 7964.44 \text{ m}$$

अतः तार की लम्बाई 7964.44 m है ।

14 – सांख्यिकी

1. बंटन 1,3,2,5,9 का माध्यक होगा –

अ. 3 ब. 4 स. 2 द. 20 अ

2. बंटन 3,5,7,4,2,1,4,3,4 का बहुलक है।

अ. 7 ब. 4 स. 3 द. 1 ब

2.

20 संख्याओं का समांतर माध्य 5 है। यदि इनमें से 8 संख्याओं का समांतर माध्य 8 तो शेष संख्याओं का समांतर माध्य क्या है ?

(A) 8 (B) 3

(C) 5 (D) कोई नहीं Ans. (B)

4.

$u_i = \frac{x_i - a}{h}$ का उपयोग माध्य निकालने की किस विधि में किया जाता है ?

(A) पद-विचलन विधि में (B) प्रत्यक्ष विधि में

(C) कल्पित माध्य विधि में (D) किसी विधि में नहीं Ans. (A)

5.

24, 15, 22, 13, 9, 10 तथा 30 का परिसर होगा-

(A) 22 (B) 24

(C) 9 (D) 21 Ans. (D)

6.

आँकड़ें 7, 0, 4, 13 का माध्य क्या है ?

(A) 4 (B) 6

(C) 7 (D) 13 Ans. (B)

7.

चर मान 30, 5, 2, 22, 14, 26 और 10 की माध्यिका है

(A) 10

(B) 14

(C) 26

(D) 30

[उत्तर : (B)]

8.

इनमें से किस केन्द्रीय प्रवृत्ति का निर्धारण ग्राफ द्वारा नहीं किया जा सकता है?

(A) माध्य

(B) माध्यिका

(C) बहुलक

(D) मानक विचलन [उत्तर : (A)]

9.

कौन-सा केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप सबसे अधिक प्रयोग होता है?

(A) माध्य

(B) माध्यिका

(C) बहुलक

(D) उपर्युक्त सभी [उत्तर : (A)]

10.

संख्याओं 1, 2, 3, ..., n के माध्य हैं

(A) $\frac{n(n+1)}{2}$

(B) $\frac{n}{2}$

(C) $\frac{n+1}{2}$

(D) कोई नहीं

Ans. (C)

Q.1

निम्नलिखित बंटन एक मोहल्ले के बच्चों के दैनिक जेबखर्च दर्शाता है। माध्य जेबखर्च 18 रु है

। लुप्त बारंबारता f ज्ञात कीजिए :

दैनिक जेब भत्ता (रुपयों में)	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23	23-25
बच्चों की संख्या	7	6	9	13	f	5	4

हल :

दैनिक जेब भत्ता (रुपयों में)	बच्चों की संख्या	x_i	$d_i = x_i - a$	$f_i d_i$
11 - 13	7	12	12 - 18 = - 6	- 42
13 - 15	6	14	14 - 18 = - 4	- 24
15 - 17	9	16	16 - 18 = - 2	- 18
17 - 19	13	a = 18	18 - 18 = 0	0
19 - 21	f	20	20 - 18 = 2	2f
21 - 23	5	22	22 - 18 = 4	20
23 - 25	4	24	24 - 18 = 6	24
कुल (Total)	$\Sigma f_i = 44 + f$			2f - 40

कल्पित माध्य विधि (Assume mean Method) से

$$\Sigma f_i d_i = 2f - 40, \Sigma f_i = 44 + f \text{ और } a = 18,$$

$$\text{माध्य जेब खर्च } (\bar{X}) = ₹ 18$$

$$\text{माध्य } (\bar{X}) = a + \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$$

$$18 = 18 + \frac{2f - 40}{44 + f}$$

$$18 - 18 = \frac{2f - 40}{44 + f}$$

$$\frac{0}{1} = \frac{2f - 40}{44 + f}$$

$$2f - 40 = 0$$

$$2f = 40$$

$$f = \frac{40}{2} = 20$$

$$f = 20$$

अतः लुप्त बारंबारता 20 है ।

2.

निम्नलिखित सारणी किसी मोहल्ले के 25 परिवारों में भोजन पर हुए दैनिक व्यय को दर्शाती है:

दैनिक व्यय (रुपयों में)	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
परिवारों की संख्या	4	5	12	2	2

एक उपयुक्त विधि द्वारा भोजन पर हुआ माध्य व्यय ज्ञात कीजिए ।

हल :

दैनिक व्यय (रुपयों में)	परिवारों की संख्या (f_i)	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{d_i}{h}$, $h = 50$	$f_i d_i$
100 - 150	4	125	- 100	$\frac{-100}{50} = -2$	- 8
150 - 200	5	175	- 50	$\frac{-50}{50} = -1$	- 5
200 - 300	12	$a = 225$	0	$\frac{0}{50} = 0$	0
300 - 350	2	275	50	$\frac{50}{50} = 1$	2
350 - 400	2	325	100	$\frac{100}{50} = 2$	4
Total	25				- 7

पग-विचलन विधि (Step-deviation Method) से माध्य :

$$\sum f_i u_i = -7, \sum f_i = 25, h = 50, a = 225$$

पग-विचलन विधि के सूत्र में उपरोक्त मानों (values) को रखने पर

$$\text{माध्य } (\bar{X}) = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right) \times h$$

$$= 225 + \left(\frac{-7}{25} \right) \times 50$$

$$= 225 + (-14)$$

$$= 211$$

Q.3

. निम्नलिखित आँकड़े, 225 बिजली उपकरणों के प्रेक्षित जीवन काल (घंटों में) कि सूचना देते हैं :

जीवनकाल (घंटों में)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
बारंबारता	10	35	52	61	38	29

उपकरणों का बहुलक जीवनकाल ज्ञात कीजिए ।

हल :

जीवनकाल (घंटों में)	बारंबारता (f _i)
0 - 20	10
20 - 40	35
40 - 60	52
60 - 80	61
80 - 100	38
100 - 120	29

वर्ग 60 - 80 की सबसे अधिक बारंबारता 61 है, अतः बहुलक वर्ग 60 - 80 है ।

इसलिए, l = 60, f₁ = 61, f₀ = 52, f₂ = 38 और h = 20

$$\begin{aligned}\text{बहुलक (Mode)} &= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h \\ &= 60 + \left(\frac{61 - 52}{2(61) - 52 - 38} \right) \times 20 \\ &= 60 + \left(\frac{9}{122 - 90} \right) \times 20 \\ &= 60 + \left(\frac{9 \times 20}{32} \right) \\ &= 60 + \left(\frac{9 \times 5}{8} \right) \\ &= 60 + \left(\frac{45}{8} \right) \\ &= 60 + 5.625 \\ &= 65.625\end{aligned}$$

Q.4

यदि नीचे दिए हुए बंटन का माध्यक 28.5 हो तो x और y के मान ज्ञात कीजिए :

वर्ग अंतराल	बारंबारता
0-10	5
10-20	x
20-30	20
30-40	15
40-50	y
50-60	5
योग	60

हल :

वर्ग-अन्तराल	बारंबारता	संचयी बारंबारता
0 - 10	5	5
10 - 20	x	$5 + x$
20 - 30	20	$25 + x$
30 - 40	15	$40 + x$
40 - 50	y	$40 + x + y$
50 - 60	5	$45 + x + y$
योग	60	$45 + x + y = 60$

दिया है, माध्यक = 28.5,

अतः 28.5 वर्ग-अन्तराल 20 - 30 में शामिल है ।

इसलिए, $l = 20$, $f = 20$, $h = 10$ और $cf = 5 + x$

$N = 60$,

$$\text{अतः } \frac{N}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

$$\text{माध्यक (Median)} = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - c.f}{f} \right) \times h$$

$$28.5 = 20 + \left(\frac{30 - (5+x)}{20} \right) \times 10$$

$$28.5 = 20 + \left(\frac{30 - 5 - x}{20} \right) \times 10$$

$$28.5 - 20 = \left(\frac{25 - x}{2} \right)$$

$$8.5 = \left(\frac{25 - x}{2} \right)$$

$$17 = 25 - x$$

$$x = 25 - 17$$

$$x = 8 \quad \dots (1)$$

अब, $45 + x + y = 60$

अथवा $x + y = 60 - 45$

$$x + y = 15$$

$$8 + y = 15 \quad \text{समी० (1) से}$$

$$y = 15 - 8$$

$$y = 7$$

$$x = 8, \text{ और } y = 7$$

15. प्रायिकता

1.

एक पासा को उछाला जाता है तो सम संख्या आने की प्रायिकता है

(a) $\frac{1}{2}$

(b) $\frac{1}{3}$

(c) $\frac{1}{4}$

(d) $\frac{1}{6}$

उत्तर:

(a) $\frac{1}{2}$

2.

एक पासा फेंकने पर 5 पाने की प्रायिकता है

(a) $\frac{1}{3}$

(b) $\frac{1}{6}$

(c) $\frac{2}{3}$

(d) $\frac{5}{6}$

उत्तर:

(b) $\frac{1}{6}$

3.

यदि घटना E के घटित होने की प्रायिकता $\frac{3}{10}$ हो, तो E के नहीं घटित होने की प्रायिकता होगा।

(a) $\frac{3}{7}$

(b) $\frac{3}{4}$

(c) $\frac{7}{10}$

(d) 0

उत्तर:

(c) $\frac{7}{10}$

Q4. निम्नलिखित में से कौन सी संख्या किसी घटना की प्रायिकता नहीं हो सकती

- (A) $2/3$
- (B) -1.5
- (C) 15%
- (D) 0.7

उत्तर : (B) -1.5 [क्योंकि किसी भी प्रायिकता की सीमा 0 से 1 के बीच होती है]

5.

$$P(A) + P(A') =$$

- (A) 0
- (B) 1
- (C) -1
- (D) $P(E)$

[Ans. (B)]

Q.6

- (i) घटना E की प्रायिकता + घटना 'E नहीं' की प्रायिकता = 1 है ।
- (ii) उस घटना की प्रायिकता जो घटित नहीं हो सकती 0 है । ऐसी घटना असंभव घटना कहलाती है ।
- (iii) उस घटना की प्रायिकता जिसका घटित होना निश्चित है 1 है । ऐसी घटना निश्चित घटना कहलाती है ।
- (iv) किसी प्रयोग की सभी प्रारंभिक घटनाओं की प्रायिकताओं का योग 1 है ।
- (v) किसी घटना की प्रायिकता 0 से बड़ी या उसके बराबर होती है तथा 1 से छोटी या उसके बराबर होती है ।

Q.7

(i) एक ड्राइवर कार चलाने का प्रयत्न करता है | कार चलना प्रारंभ हो जाती है या कार चलना प्रारंभ नहीं होती है |

उत्तर : सम्प्रायिक है |

(ii) एक खिलाड़ी बास्केटबॉल को बास्केट में डालने का प्रयत्न करती है | वह बास्केट में बॉल डाल पाती है या नहीं डाल पाती है |

उत्तर : सम्प्रायिक है |

(iii) एक सत्य - असत्य प्रश्न का अनुमान लगाया जाता है | उत्तर सही है या गलत होगा |

उत्तर : सम्प्रायिक है |

(iv) एक बच्चे का जन्म होता है | वह एक लड़का है या एक लड़की है |

उत्तर : सम्प्रायिक है |

Q.8

एक पिग्गी बैंक (piggy bank) में, 50 पैसे के सौ सिक्के हैं, 1 रु के पचास सिक्के हैं, 2 रु के बीस सिक्के और 5 के 10 सिक्के हैं | यदि पिग्गी बैंक को हिलाकर उल्टा करने अपर कोई एक सिक्का गिराने के परिणाम सम्प्रायिक हैं, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि वह गिरा हुआ सिक्का

(i) 50 पैसे का होगा ?

(ii) 5 रु का नहीं होगा ?

हल : 50 पैसे के सिक्कों की संख्या = 100

1 रुपये के सिक्के = 50

2 रुपये के सिक्के = 20

5 रुपये के सिक्के = 10

कुल सिक्कों की संख्या = 100 + 50 + 20 + 10 = 180

(i) 50 पैसे का होगा

$$\begin{aligned}\text{सिक्का 50 पैसे का होगा की प्रायिकता} &= \frac{50 \text{ पैसे की सिक्कों की संख्या}}{\text{कुल सिक्कों की संख्या}} \\ &= \frac{100}{180} = \frac{5}{9}\end{aligned}$$

(ii) 5 रू का नहीं होगा ?

$$\begin{aligned}5 \text{ रुपये के सिक्के होने की प्रायिकता} &= \frac{5 \text{ रुपये की सिक्कों की संख्या}}{\text{कुल सिक्कों की संख्या}} \\ &= \frac{10}{180} = \frac{1}{18}\end{aligned}$$

अब हम जानते हैं कि $P(E) + P(\bar{E}) = 1$

$$\text{अतः } \frac{1}{18} + P(\bar{E}) = 1$$

$$\Rightarrow P(\bar{E}) = 1 - \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow P(\bar{E}) = \frac{18-1}{18} = \frac{17}{18}$$

$$5 \text{ रुपये के सिक्के नहीं होने की प्रायिकता} = \frac{17}{18}$$

Q.9

52 पत्तों कि अच्छी प्रकार से फटी गई एक गड्डी में से एक पत्ता निकला जाता है ।

निम्नलिखित को प्राप्त करने कि प्रायिकता ज्ञात कीजिए :

- (i) लाल रंग का बादशाह
- (ii) एक फेस कार्ड अर्थात् तस्वीर वाला पत्ता
- (iii) लाल रंग का तस्वीर वाला पत्ता
- (iv) पान का गुलाम
- (v) हुकुम का पत्ता
- (vi) एक ईंट कि बेगम

हल : (i) लाल रंग का बादशाह

ताश में कुल पत्तों की संख्या = 52

लाल रंग के बादशाहों की संख्या = 2

$$P(\text{लाल रंग का बादशाह}) = \frac{\text{लाल रंग के बादशाहों की संख्या}}{\text{ताश के कुल पत्ते}}$$

$$= \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$

(ii) एक फेस कार्ड अर्थात् तस्वीर वाला पत्ता

फेस कार्ड अर्थात् तस्वीर वाला पत्तों की संख्या = 12

$$P(\text{फेस कार्ड अर्थात् तस्वीर वाला पत्तों की संख्या}) = \frac{\text{फेस कार्ड की संख्या}}{\text{ताश के कुल पत्ते}}$$

$$= \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

(iii) लाल रंग का तस्वीर वाला पत्ता

लाल रंग के तस्वीर वाला पत्ता = 6

$$P(\text{लाल रंग के तस्वीर वाला पत्ता}) = \frac{\text{लाल रंग के तस्वीर वाला पत्ता}}{\text{ताश के कुल पत्ते}}$$
$$= \frac{6}{52} = \frac{3}{26}$$

(iv) पान का गुलाम

पान के गुलाम की संख्या = 1

$$P(\text{पान का गुलाम}) = \frac{\text{पान के गुलाम की संख्या}}{\text{ताश के कुल पत्ते}}$$
$$= \frac{1}{52}$$

(v) हुकुम का पत्ता

ताश के पत्तों में हुकुम के पत्तों की संख्या = 13

$$P(\text{हुकुम का पत्ता}) = \frac{\text{हुकुम के पत्तों की संख्या}}{\text{ताश के कुल पत्ते}}$$
$$= \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

(vi) एक ईट कि बेगम

ईट की बेगम की संख्या = 1

$$P(\text{ईट की बेगम}) = \frac{\text{ईट की बेगम}}{\text{ताश के कुल पत्ते}}$$
$$= \frac{1}{52}$$

Q.10 किसी कारण 12 खराब पेन 132 अच्छे पेनों में मिल गए हैं | केवल देखकर यह नहीं बताया जा सकता है कि कोई पेन खराब है या अच्छा है | इस मिश्रण में से, एक पेन यादृच्छया निकाला जाता है | निकले गए पेन कि अच्छा होने कि प्रायिकता जात कीजिए |

हल : खराब और अच्छे मिलाकर कुल पेन = $12 + 132 = 144$

अच्छे पेन की संख्या = 132

$$\begin{aligned}\text{अच्छे पेन होने की प्रायिकता} &= \frac{\text{अच्छे पेन की संख्या}}{\text{कुल पेनों की संख्या}} \\ &= \frac{132}{144} = \frac{11}{12}\end{aligned}$$

Q.11

एक बच्चे के पास ऐसा पासा है जिसके फलकों पर निम्नलिखित अक्षर अंकित हैं :



इस पासे को एक बार फेंका जाता है | इसकी क्या प्रायिकता है कि

(i) A प्राप्त हो ?

(ii) D प्राप्त हो ?

(i) A प्राप्त हो ?

पासे पर कुल अक्षर = 6

A की संख्या = 2

$$\begin{aligned}\text{A प्राप्त करने की प्रायिकता} &= \frac{\text{A की संख्या}}{\text{पासे पर कुल अक्षर}} \\ &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

(ii) D प्राप्त हो ?

पासे पर कुल अक्षर = 6

D की संख्या = 1

$$\begin{aligned} \text{D प्राप्त करने की प्रायिकता} &= \frac{\text{D की संख्या}}{\text{पासे पर कुल अक्षर}} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Q.12

एक पासे को एक बार फेंका जाता है | निम्नलिखित को प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए :

- (i) एक अभाज्य संख्या
- (ii) 2 और 6 के बीच स्थित कोई संख्या
- (iii) एक विषम संख्या

हल : (i) एक अभाज्य संख्या

पासे पर अंक 1, 2, 3, 4, 5, 6

एक पासे में कुल अंक = 6

अभाज्य संख्या = 2, 3, 5

$$\begin{aligned} \text{एक विषम संख्या आने की प्रायिकता} &= \frac{\text{विषम संख्याओं की संख्या}}{\text{पासे पर कुल अंक}} \\ &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(ii) 2 और 6 के बीच स्थित कोई संख्या

2 और 6 के बीच स्थित कोई संख्या : 3, 4, 5

2 और 6 के बीच स्थित कोई संख्या आने की

$$\text{प्रायिकता} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणाम}}$$

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(iii) एक विषम संख्या

पासे पर विषम संख्या : 1, 3, 5

$$\text{विषम संख्या आने की प्रायिकता} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणाम}}$$

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Q.13

20 बल्बों के एक समूह में 4 बल्ब खराब हैं। इस समूह में से एक बल्ब यादृच्छया निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह बल्ब खराब होगा ?

हल : कुल बल्बों की संख्या = 20

खराब बल्बों की संख्या = 4

$$\text{खराब बल्ब होने की प्रायिकता} = \frac{\text{खराब बल्बों की संख्या}}{\text{कुल बल्बों की संख्या}}$$

$$= \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$