



# શિક્ષા પત્રિકા

માસિક

વર્ષ : 53

દિસમ્બર, 2012

અંક : 6

પ્રકાશન તિથિ : 2 દિસમ્બર, 2012

ગણિત વિશેષાંક

125વીં જયન્તી પર  
શત્ શત્ નમન



$$\frac{1 + 53x + 9x^2}{1 - 82x - 82x^2 + x^3} = \frac{2 - 26x - 12x^2}{1 - 82x - 82x^2 + x^3}$$

$$\frac{2 + 8x - 10x^2}{1 - 82x - 82x^2 + x^3}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$d_n^2 + d_n^2 = d_n^2 + (-1)^n$$

મૂલ્ય : 10 રૂપયે

*Shiksha Patrika*

શ્રીનિવાસ  
રામાનુજન

22 દિસમ્બર 1887 - 26 અપ્રેલ 1920

$$64 + 8\sqrt{35} \alpha^2 + (64 - 8\sqrt{35}) \beta^2 - 43(-1)^n$$

$$77 + 7\sqrt{35} \alpha^2 + (77 - 7\sqrt{35}) \beta^2 + 16(-1)^n$$



## चित्र समाचार



**बीकानेर :** महामहिम राज्यपाल श्रीमती मार्ग्रेट आल्वा के बीकानेर पधारने पर उनके बेज लगाकर सम्मानित करता स्काउट-गाइड परिवार, बीकानेर। बाएं हैं श्री बृजमोहन पुरोहित, सचिव, स्थानीय संघ, बीकानेर।



**बांसवाड़ा :** मानगढ़ धाम के शहीद भगतों की स्मृति में 17 नवम्बर, 2012 को आयोजित श्रद्धांजलि समारोह में "शहादत के सौ साल" पुस्तक का लोकार्पण करते माननीय मुख्यमंत्री एवं अन्य अतिथि महानुभाव।



**जोधपुर :** बालिका साइकिल वितरण योजना के अन्तर्गत पंचायत समिति फलोदी के लिए साइकिलों के ट्रक को हरी झण्डी दिखाकर रवाना करते माननीय मुख्यमंत्री श्री अशोक गहलोत।



**जोधपुर :** शिवराम नत्थू जी टाक राजकीय माध्यमिक विद्यालय, पूंजला में आयोजित समारोह में एक बालिका को आपकी बेटी योजना का चेक प्रदान कर उससे बातचीत करते माननीय मुख्यमंत्री श्री अशोक गहलोत।



**उदयपुर :** राजस्थान साहित्य अकादमी, उदयपुर द्वारा 3-4 नवम्बर, 2012 को राजस्थान लेखिका सम्मेलन-2012 का आयोजन उदयपुर में किया गया। इस अवसर पर मुख्य अतिथि डॉ. कमला, महामहिम राज्यपाल गुजरात, अकादमी अध्यक्ष श्री वेद व्यास एवं अन्य अतिथिगण।



गुजरात स्थित जूनागढ़ में दिनांक 6-7 अक्टूबर 2012 में लोक साहित्य - सत साहित्य परम्परा विषय पर राजस्थान एवं गुजरात के साहित्यकारों की गोष्ठी आयोजित हुई। इस अवसर पर राजस्थानी भाषा, साहित्य एवं संस्कृति अकादमी के मुख पत्र जागती जोत के लोकार्पण का दृश्य।



# शिविर पत्रिका

प्रारम्भिक एवं माध्यमिक शिक्षा का  
समाचार-विचार मासिक  
गणित विशेषांक

वर्ष : 53 अंक : 6

दिसम्बर, 2012

प्रकाशन तिथि : 2 दिसम्बर, 2012

प्रधान सम्पादक

डॉ. वीना प्रधान

•

वरिष्ठ सम्पादक

ओमप्रकाश सारस्वत

•

सहायक

सांग सिंह

मुकेश व्यास

मूल्य : 10 रुपये

वार्षिक चंदा दर व शर्तें

- शिक्षकों/लिपिकों के लिए 50 रु.
- संस्थाओं/अन्य व्यक्तियों के लिए 100 रु.
- मनी ऑर्डर/बैंक ड्रॉफ्ट निदेशक, माध्यमिक शिक्षा राजस्थान, बीकानेर के नाम देय है।
- पोस्टल ऑर्डर/चैक स्वीकार्य नहीं हैं।
- कृपया पूर्ण पता मय पिन कोड लिखें।

पत्र व्यवहार हेतु पता

वरिष्ठ सम्पादक, शिविर पत्रिका

माध्यमिक शिक्षा, राज. बीकानेर-334 011

दूरभाष : 0151-2528875

E-mail : teacher.today@yahoo.com

शिविर पत्रिका में व्यक्त विचार लेखकों के अपने विचार होते हैं। अभिव्यक्त विचारों से शिक्षा विभाग राजस्थान का सहमत होना आवश्यक नहीं है।—व.सं.

शिविर पत्रिका

न हि ज्ञानेन सदृशं पवित्रमिह विद्यते

श्रीमद्भगवद्गीता 4/38

इस संसार में ज्ञान के समान पवित्र करने वाला निःसंदेह कुछ भी नहीं है।

In this world there is no purifier as great as knowledge.

## इस अंक में

राष्ट्रीय गणित वर्ष और हम	5	दिशाकल्प
श्रीनिवास रामानुजन : एक परिचय	6	डॉ. डी.सी. गोखरू
प्राचीन भारत के प्रमुख गणितज्ञ	9	प्रो. जे.एल. बंसल
भारत के महान गणितज्ञ : आर्यभट्ट-प्रथम	10	शशिकान्त
चतुर हेन्स : गणितज्ञ घोड़ा	12	प्रो. उज्ज्वल पाण्डे
सर आइज़ैक न्यूटन : जीवन व कर्म	14	डॉ. रचना माथुर
खगोलविज्ञ तथा गणितज्ञ ब्रह्मगुप्त	15	डॉ. राकेश कुमार परमार
लीलावती	17	स्व. धनपाल सिंह माथुर
खगोलज्ञ, गणितज्ञ तथा ज्योतिषाचार्य वराहमिहिर	18	डॉ. मुकेश एम. जोशी
गणित का इतिहास	19	डॉ. नरेन्द्र सिंह सोलंकी
कीर्तिपुरुष के हस्ताक्षरों को निहारते हुए	31	भगवती प्रसाद गौतम
वैदिक गणित का ज्ञान	33	डॉ. के.डी. शर्मा
बापू की सीख-18 शरीर	38	मो.क. गाँधी
गणित की कुछ रुचिकर पहेलियाँ	41	निधि शेखावत
संख्याओं का क्रमिक विकास	42	डॉ. शौकत अली
<u>शिविरा विचार मंच</u>		
आत्मीयता से छात्र बना इंजीनियर	44	शिवजीराम चौधरी
यों समझ में आया लाभ-हानि का गणित	44	महेश चन्द सिद्ध
नवाचारों की माँग करती है गणित	45	महेश कुमार गर्ग
गणित का महत्व : सूक्तियों में	47	सुनील पंचारिया
अंक 9 की रोचक विशेषताएँ	48	डॉ. पूर्णिमा चोपड़ा
त्रिकोणमिति का महत्व	49	राधाकृष्ण विश्नोई
गणित की जय जय	50	प्रतिध्वनि

## स्थाई स्तम्भ

पाठक पीठ - 4/आदेश परिपत्र 23-30/शिविरा पंचांग - 37

विद्यालय प्रसारण कार्यक्रम - 32

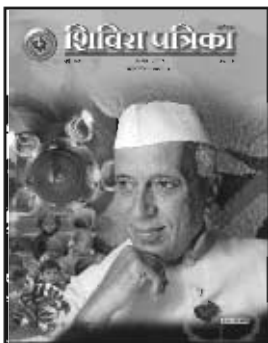
## विशेष रपट

58वीं राष्ट्रीय विद्यालयी बास्केट बाल प्रतियोगिता सम्पन्न - 39-40

ओमप्रकाश सारस्वत

## मुखावरण

ब्रजेश कुमार मिश्रा



शिविरा माह नवम्बर, 2012 का अंक पढ़ा। शिक्षा निदेशक की कलम से दिशाकल्प “गुणमयी शिक्षा से जीवन में सफलता” ने भीतर तक झकझोर दिया। काश ! हमारे शिक्षक भाई-बहन निदेशक महोदय के विश्वास के अनुरूप अपनी योग्यता एवं क्षमता से बच्चों को पढ़ाने का काम करें। इससे वह दिन दूर नहीं होगा जब भारत पुनः विश्वगुरु के रूप में प्रतिष्ठित होगा। “बच्चों के नाम इन्दिरा जी के पत्र” को स्कूली छात्र-छात्राओं को अवश्य पढ़ाया जाना चाहिए। “पिसनहारी का कुआँ” ललित रचना के रूप में जल के बारे में बहुत गहरा संदेश दे रही है। सम्पादक मण्डल को बधाई !

—महेन्द्र कुमार चौधरी, 40 जीबी, श्रीगंगानगर

नवम्बर माह की शिविरा का अंक प्राप्त हुआ। बाल दिवस विशेषांक के रूप में प्रेरणादायी भावों का प्रकाशन किया गया। ऊर्जावान व त्वरित शैली की निदेशक महोदया ने दिशाकल्प में शिक्षकों को नई दिशा प्रदान कर आत्म चिन्तन करने एवं शिक्षा के नवीन उपादानों को उभारने की पहल की है। वरिष्ठ संपादक के आलेख में ‘शिक्षक के रूप में पं. जवाहर लाल नेहरू’ हमें शिक्षकीय गरिमा प्रदान करने के साथ हमारे कर्तव्य के प्रति सजग करता है। राष्ट्र निर्माण में श्रेयष्कर भूमिका निभाने वाले नेहरू ने हमारे देश का नाम विश्व स्तर पर रोशन किया है। बालकों के प्रति स्नेह प्रकट करने का अनूठा भाव हमें भी उत्साहित करता है।

शिक्षकीय गरिमा की शिविरा पत्रिका में बालकों के सर्वांगीण विकास के नये-नये सोपान व प्रेरक प्रसंग प्रकाशित किये जाते हैं जो हमारी कर्तव्य भावना में सजगता प्रदान करते हैं।

“पिसनहारी का कुआँ” में विशेष दृष्टांत प्रस्तुत कर वरिष्ठ संपादक ने शिविरा के पाठकों को वर्तमान एवं भविष्य के प्रति पूर्ण सावधानी के संकेत दिए हैं कि हमारा जीवन किस तरह सुनहरा एवं सुखद बन सकता है।

—सालगराम परिहार, बालोतरा, बाड़मेर

शिविरा पत्रिका नवम्बर 2012 अंक पढ़ा व समझा। दिशाकल्प “शिक्षक के रूप में पं. नेहरू”, “पिसनहारी का कुआँ” एवं “विद्यालयों के समक्ष चुनौतियाँ” आलेख बहुत अच्छे लगे। दिशाकल्प में डॉ. प्रधान द्वारा शिक्षकों के लिए लिखे गए शब्द “समर्पण एवं प्रतिबद्धतापूर्वक कार्य करने की महान परम्परा के अनुगामी है” एक अच्छा Compliment लगा तथा इस कथन ने शिक्षकों को पुनः प्रेरित कर आगे बढ़ने हेतु उद्यत किया है। सारस्वत जी के प्रतिध्वनि में “पिसनहारी का कुआँ” मूल्य आधारित शिक्षण की दिशा में अच्छा संकेतक है। हृदयस्पर्शी इस दृष्टान्त ने अनुचिन्तन हेतु अवसर दिया है। पिसनहारी ने स्वप्रेरणा से कुआँ बनवाया, राहगीर ने उससे प्रेरणा ली लेकिन यह प्रेरणा शिक्षकों को प्रेरित कर हजारों बच्चों के लिए एक मानवीयता

की पुख्ता इमारत बन गई। पिता के पत्र पुत्री के नाम पढ़े भी थे व कक्षा में बच्चों को पढ़ाए भी हैं, परन्तु पं. नेहरू को एक संवेदनशील बाल मनोविज्ञान के निपुण शिक्षक की भूमिका में जिस प्रकार प्रस्तुत किया गया है श्लाघनीय है। शिक्षण की वैकल्पिक व्यवस्था व विभिन्न शिक्षण तकनीक के रूप में दूरस्थ शिक्षा का प्रत्यय देता यह आलेख शिक्षकों के लिए आत्मबल एवं स्वाध्याय की ओर प्रेरित करता है। रूपनारायण काबरा ने “चाक-टॉक के मूल ढाँचे में व्यापक एवं प्रभावी परिवर्तन करने” की बात कहकर विकासात्मक सम्प्रेषण की दिशा में सोचने हेतु झकझोर दिया है।

—देवेन्द्र पण्ड्या, बांसवाड़ा

शिविरा पत्रिका नवम्बर 2012 अंक में प्रतिध्वनि में पिसनहारी का कुआँ और तीर्थार्थी व्यक्ति के उद्धरणों से प्रतिध्वनित हो रहा है। जल का महात्म्य जल संरक्षण व जल का मितव्ययतापूर्ण सदुपयोग। प्रतिध्वनि सामयिक व वांछनीय है। दिशाकल्प में निदेशक महोदया का गुणवत्ता युक्त शिक्षा का आग्रह व आह्वान के साथ-साथ शिक्षा जगत के लिए सामयिक चेतावनी व वक्त की पुकार है। आदरणीया निदेशक महोदया के उद्बोधन को रूपान्तरित कर यूँ भी कहा जा सकता है— “हो रहा है शिक्षा का संध्यात्मक विकास / किन्तु साथ-साथ गुणात्मक हास/मननीय, चिन्तनीय प्रत्यय है दोस्तो/ अब इसी ओर हो पुरजोर पुख्ता प्रयास।” श्रेष्ठ सामग्री चयन हेतु हार्दिक धन्यवाद।

—टेकचन्द्र शर्मा, झुंझुनूँ

शिविरा का नवम्बर अंक यथा समय मिला और आद्योपांत पढ़ा। विगत कालखंड में पत्रिका के रूप-स्वरूप व सम्पादन-संयोजन में जो स्तरीय निखार देखने को मिला है, वह बरबस ही अभिभूत कर देने वाला है। इस दौर में कुछ अंक तो, जैसे टैगोर की डेढ़ सौवीं जन्मशती, राष्ट्रीय विज्ञान दिवस, स्वाध्याय आदि को समर्पित विशेषांक निःसंदेह सराहनीय और संग्रहणीय रहे। सद्यः प्रकाशित अंक में भी ‘मन संपर्क के धनी : अनिल बोर्दिया’ के बहाने थानवी साहब ने शिक्षा व व्यक्तित्व के विभिन्न पक्षों व मनोभावों को जिस प्रकार शब्द दिए हैं, वे बड़े ही मर्मस्पर्शी और सूचनापरक बन पड़े हैं। जयंती व बालदिवस के संदर्भ में पं. नेहरू के अद्भुत शिक्षक स्वरूप को और ‘पिसनहारी का कुआँ’ के अंतर्गत जल व जीवन की सार्थकता को सारस्वत जी ने जिस कुशलता से रेखांकित किया है, व अद्भुत व अभिनंदनीय है। दिशाकल्प ‘गुणमयी शिक्षा से सफलता’, इंदिरा जी का पत्र, वाचन व विचार, साथ ही अन्यान्य पहलुओं पर भी बहुत कुछ कहा-लिखा जा सकता है। अंक में समाविष्ट समग्र प्रस्तुति पर शिविरा टीम को हार्दिक बधाई।

—भगवती प्रसाद गौतम, दादाबाड़ी, कोटा

## चिन्तन

यथा शिखा मयूराणां नागानां मणयो यथा।  
तद्वद् वेदांगशास्त्राणां गणितं मूर्धनि स्थितम् ॥

जैसे मयूरों की शिखाएँ और नागों की मणियाँ सर्वोच्च स्थान पर रहती हैं, उसी प्रकार वेदांग तथा शास्त्रों में गणित सर्वोपरि है।

—याजुष वेदांग ज्योतिष (श्लोक-4)



सत्यमेव जयते



**डॉ. वीना प्रधान**  
निदेशक, माध्यमिक शिक्षा

“हमारे गणित शिक्षकों को चाहिए कि वे अपनी अधिकतम योग्यता एवं क्षमता से छात्र-छात्राओं को गणित शिक्षण करवाएँ। उनके स्नेहिल मार्गदर्शन से बच्चों के दिल से गणित का खौफ निकल कर उसके प्रति रुचि उत्पन्न होगी, यह निश्चित है।”

## दिशाकल्प

### राष्ट्रीय गणित वर्ष और हम

वर्ष 2012 भारत में राष्ट्रीय गणित वर्ष के रूप में मनाया जा रहा है। माह दिसम्बर गणित वर्ष का अन्तिम माह है। वस्तुतः यह वर्ष महान भारतीय गणितज्ञ श्रीनिवास रामानुजन का 125वाँ जन्मवर्ष है और उस दिव्य गणितात्मा के प्रति सम्मान प्रकट करने के लिए ही भारत में इस वार्षिक आयोजन का तानाबाना रचा गया। भारत माता के महान सपूत रामानुजन के प्रति आदर एवं विनम्र श्रद्धांजलि के साथ शिविरा पत्रिका का यह अंक उन्हें समर्पित है।

भारत में गणित अध्ययन-मनन का पुरातन इतिहास रहा है। इतिहासकार गणित का जन्म भारत में ही हुआ मानते हैं। हमें इस बात पर गर्व है कि शून्य, पाई तथा दशमलव प्रणाली जैसी उपलब्धियाँ संसार को प्रदान करने वाला हमारा देश भारत ही है। सच तो यह है कि पश्चिमी देश जिस समय ज्ञान मार्ग की ओर कदम बढ़ा रहे थे, तब भारत में ज्ञान-विज्ञान का परचम लहरा रहा था। हड़प्पा के निवासी नाप तौल की अनेक प्रणालियों का प्रयोग करते थे। भारत का यही गणित ज्ञान कालान्तर में अरब तथा यूरोप में पहुँचा।

गणित का दर्शन इस सिद्धान्त पर आधारित है कि जो कुछ भी चिन्तनयोग्य है, उस पर जरूर चिन्तन किया जाए और यही कारण है कि सांसारिक, वैदिक, धार्मिक व आध्यात्मिक सभी कार्यों में गणित को उपयोगी माना गया है। कहने का आशय यह है कि गणित और दर्शन का आपस में निकट का रिश्ता है और ये दोनों मिलकर ही वस्तुओं के बारे में कुछ कह पाते हैं। महान विचारक डेमोलेक्स बोर्डार्स ने अपनी कृति ऑन मैथेमेटिक्स एण्ड मैथेमेटिशियन्स में कितना सुन्दर कहा है, ‘गणित के बिना दर्शनशास्त्र की गहराई नहीं नापी जा सकती और दर्शनशास्त्र के बिना गणित की गहराई नहीं नापी जा सकती। इन दोनों के बिना किसी वस्तु की भी गहराई नहीं नापी जा सकती।’ इस प्रकार हम कह सकते हैं कि गणित व दर्शन एक दूसरे के पूरक हैं।

स्कूली शिक्षा में बच्चे के शिक्षण की शुरुआत ही गणित से होती है। अंक-अक्षर ज्ञान की बात करें तो उसमें अंक पहले है जो गणित का प्रतीक है। पट्टी-पहाड़ा के अन्तर्गत स्लेट पर अंकों का अभ्यास कराया जाता है। इस प्रकार स्लेट पर 1, 2, 3 ..... से शुरू होने वाला अभ्यास ही अन्ततः उच्चतर गणितीय क्रियाओं का आधार बनता है। हमारे गणित शिक्षकों को चाहिए कि वे अपनी अधिकतम योग्यता एवं क्षमता से छात्र-छात्राओं को गणित शिक्षण करवाएँ। उनके स्नेहिल मार्गदर्शन से बच्चों के दिल से गणित का खौफ निकल कर उसके प्रति रुचि उत्पन्न होगी, यह निश्चित है। इस माह में अर्द्धवार्षिक परीक्षाएँ हो रही हैं। मेरी छात्र-छात्राओं से अपील है कि वे पूरी मेहनत, लगन व तन्मयता के साथ परीक्षा में सम्मिलित हों। शिक्षकों को तो कुशल निर्णायक की भूमिका अदा करनी ही है, अपनी महान परम्परा के अनुरूप!

शिविरा पत्रिका का यह अंक कलैण्डर वर्ष 2012 का आखिरी अंक है। इसके बाद तो हम आगामी नए कलैण्डर वर्ष में ही मिलेंगे। हमने समाप्ति की ओर अग्रसर हो रहे वर्तमान वर्ष की शुरुआत में कई संकल्प लिए थे, कई वादे किए थे, उन्हें कहाँ तक पूरा कर पाए। इस बात की ईमानदार समीक्षा करते हुए अगले वर्ष के नियोजन की तैयारी अभी से हमें करनी है।

मेरी शुभकामनाएँ सदैव आपके साथ रहेगी।

(डॉ. वीना प्रधान)



**प्रारम्भिक जीवन काल :** श्रीनिवास रामानुजन का जन्म उनके ननिहाल ईरोड (तमिलनाडु) में गुरुवार 22 दिसम्बर 1887 को हुआ था। रामानुजन के पिता श्रीनिवास अय्यंगर कुंभकोणम (तमिलनाडु) में एक व्यापारी की कपड़े की दुकान में मुनीम थे। श्री वैष्णव ब्राह्मण परिवार कुंभकोणम में (1887-1894) एक कमरे के घर में रहते थे।

**शिक्षा-दीक्षा :** रामानुजन की प्राथमिक और हाईस्कूल की पढ़ाई कुंभकोणम में ही हुई। 16 वर्ष की आयु में दिसम्बर 1903 में मैट्रिक की परीक्षा प्रथम श्रेणी में उत्तीर्ण करने पर उन्हें छात्रवृत्ति मिली। कुंभकोणम के शासकीय महाविद्यालय में एफ.ए. परीक्षा में सुब्रह्मण्यम छात्रवृत्ति मिली। वहाँ वे गणित विषय को छोड़कर शेष विषयों में अनुत्तीर्ण हो गये। 1906 में पचयप्पा महाविद्यालय, मद्रास में प्रवेश लिया किन्तु 3 माह पश्चात् ही पढ़ाई छोड़ दी तथा स्वयंपाठी विद्यार्थी के रूप में पुनः एफ.ए. की परीक्षा दी किन्तु दुबारा भी अनुत्तीर्ण रहे। 14 जुलाई, 1909 को उनका विवाह जानकी अम्मा से हुआ।

विवाह पश्चात् जीविकोपार्जन हेतु नौकरी की तलाश में प्रयास करते नैलौर के तत्कालीन जिलाधीश दीवान बहादुर रामचन्द्र राव से मिले जो स्वयं भी गणित के प्रेमी थे। रामानुजन ने अपनी दो बड़ी-बड़ी नोट बुक्स भी उन्हें दिखलाई जिससे वे बहुत प्रभावित हुए। उन्होंने कुछ समय तक आर्थिक मदद भी की किन्तु रामानुजन स्वाभिमानी होने के कारण दूसरों की मदद पर निर्भर होना नहीं चाहते थे। 12 जनवरी से 21 फरवरी, 1912 तक ए.जी. ऑफिस में एक क्लर्क की 20 रुपये प्रति माह पर नौकरी की। फिर उनको मार्च 1912 में मद्रास पोर्ट ट्रस्ट के कार्यालय में 30 रुपये महीने की नौकरी मिल गई। इस दौरान उनकी प्रतिभा को पहचाना गया और मद्रास यूनिवर्सिटी ने उन्हें दो वर्षों के लिए 75 रुपये प्रति माह की छात्रवृत्ति प्रदान की।

अंग्रेजी के प्रख्यात लेखक सी.पी. स्नो ने लिखा कि रामानुजन ने कैंब्रिज विश्वविद्यालय के दो सुप्रसिद्ध गणितज्ञों एच.एफ. बेकर और

## गणित की महान विभूति श्रीनिवास रामानुजन : एक परिचय

□ डॉ. डी.सी. गोखरू

ई.डब्ल्यू. हाब्सन को अपने प्रमेय भेजे थे और उन दोनों ने, बिना कोई राय दिए, वे प्रमेय उन्हें लौटा दिए थे। रामानुजन ने 16 जनवरी, 1913 को केंब्रिज विश्वविद्यालय के विश्व प्रसिद्ध गणितज्ञ G.H. Hardy को निम्न पत्र लिखा।

“Dear Sir,

I beg to introduce myself to you as a clerk in the Accounts Department of the Port Trust Office at Madras on a salary of only Rs. 20 per annum. I am now about 23 years of age. I have had no university education but I have undergone the ordinary school course. After leaving school I have been employing the spare time at my disposal to work at Mathematics. I have not trodden through the conventional regular course which is followed in a University course but I am striking out a new path for myself. I have made a special investigation

of divergent series in general and the results I get are termed by the local mathematicians as ‘startling’.

“I would request you to go through the enclosed papers, Being poor, if you are convinced that there is anything of value I would like to have my theorems published. I have not given the actual investigations nor the expressions that I get but I have indicated the lines on which I proceed. Being inexperienced I would very highly value any advice you give me.

Requesting to be excused for the trouble I give you.

I remain, Dear Sir,

Yours truly  
S. Ramanujan”.

फरवरी, 1913 में कैंब्रिज विश्वविद्यालय के ट्रिनिटी कालेज के फेलो और सुप्रसिद्ध गणितज्ञ प्रो. जी.एच. हार्डी डाक से आई चिट्ठियों पर नजर डाल रहे थे। डाक में एक बड़ा लिफाफा था, जिस पर भारतीय टिकट लगे हुए थे। हार्डी ने लिफाफा खोला। भीतर से निकाला एक पत्र और उसके साथ कुछ पुराने कागज के पन्ने थे, जिन पर गणित के 120 प्रमेय एवं सूत्र लिखे हुए थे।

इन प्रमेयों के साथ उनकी उपपत्ति नहीं दी गई थी। हार्डी कुछ नाराज हुए। उन्हें ऐसा लगा कि रामानुजन ने उन्हें कहीं धोखा देने की कोशिश तो नहीं की है। उन्होंने पत्र लिफाफे में रख दिया और अपने दैनिक शोध कार्य में जुट गए, लेकिन उस दिन उनका मन किसी काम में नहीं लगा। रह-रहकर रामानुजन के गणितीय प्रमेय उनके मस्तिष्क में लगातार मँडराते रहे। इनमें कुछ प्रमेय तो ऐसे थे जिनके बारे में हार्डी



डॉ. डी.सी. गोखरू

डॉ. डी.सी. गोखरू का नाम राजस्थान के प्रख्यात गणित पण्डितों में बड़े सम्मान के साथ लिया जाता है। आप प्राचार्य पद से सेवानिवृत्त हुए हैं। आप अनेक समितियों के अध्यक्ष, संयोजक एवं सचिव रहे हैं। आपके द्वारा गणित विषय पर महत्वपूर्ण लेखन कार्य किया गया जो विशिष्ट पुस्तकों के रूप में उपलब्ध है।

ने पहले कभी कल्पना भी नहीं की थी। वे सोचने लगे— ये प्रमेय गणितीय प्रतिभा का चमत्कार है।

शाम को हार्डी और लिटिलवुड शतरंज खेलने के लिए इकट्ठा हुए। खेल पूरा होने के बाद हार्डी ने लिटिलवुड के सामने रामानुजन के प्रमेयों का उल्लेख किया और देर रात तक बैठकर उनका अध्ययन किया। अंत में इस निष्कर्ष पर पहुँचे कि इन प्रमेयों का रचयिता कोई साधारण व्यक्ति नहीं बल्कि एक अद्वितीय गणितीय प्रतिभा है। यह तो हार्डी और समूचे गणित-जगत को बाद में जाकर ही स्पष्ट हुआ कि रामानुजन की प्रतिभा गॉस (Gauss), आइलर (Euler) और जैकोबी (Jacobi) जैसे महान गणितज्ञों के कोटि की है।

रामानुजन की असाधारण प्रतिभा को भारत में ही पहचान लिया गया था।

दरअसल इंग्लैण्ड जाने के पहले ही चंद प्रभावशाली भारतीयों के प्रयासों से रामानुजन के लिए मद्रास विश्वविद्यालय ने गणितीय शोध के लिए 250 पौंड वार्षिक छात्रवृत्ति की व्यवस्था की जिससे वे निश्चित होकर शोधकार्य में जुट गये थे। इंडियन मेथमेटिकल सोसायटी के जर्नल में उनके कुछ निबंध प्रकाशित भी हो चुके थे।

रामानुजन 17 मार्च, 1914 को जहाज द्वारा समुद्री मार्ग से रवाना हुए और 14 अप्रैल, 1914 को इंग्लैण्ड पहुँचे और केंब्रिज विश्वविद्यालय के ट्रिनिटी कालेज में प्रो. हार्डी के साथ गणित का अपना अध्ययन और शोध कार्य शुरू किया। पाँच साल के इंग्लैण्ड-निवास में रामानुजन के कई शोध-निबंध गणित की मशहूर पत्रिकाओं में प्रकाशित हुए। इनमें से कुछ तो हार्डी और रामानुजन के सहयोग के परिणाम थे।

थोड़े समय में ही रामानुजन का नाम गणित की दुनिया में मशहूर हो गया। उन्हें अपने समय का एक अतिश्रेष्ठ गणितज्ञ समझा जाने लगा। मार्च 1915 में केंब्रिज विश्वविद्यालय ने बी.ए. की मानद उपाधि दी। केंब्रिज के ट्रिनिटी कालेज ने उन्हें 250 पौंड वार्षिक फेलोशिप (Fellowship) दी। लंदन की प्रख्यात रॉयल सोसायटी ने 1918 में उन्हें अपना फेलो

(Fellow) चुना। निर्वाचित होने वाले वह दूसरे भारतीय थे। इससे पूर्व 1841 में प्रथम भारतीय जहाज-निर्माता इंजीनियर अर्देशिर करसेटजी को यह सम्मान मिला था।

रामानुजन की प्रतिभा को पहचानने और प्रकाश में लाने का श्रेय डा. हार्डी को है, लेकिन काफी हद तक इसे संयोग ही समझना चाहिए।

प्रो. हार्डी के सान्निध्य और सहयोग से रामानुजन की प्रतिभा तेजी से चमकी। गणित के कुछ विषयों पर, खासकर संख्या-सिद्धांत (Number theory) और विश्लेषण (analysis) पर रामानुजन का असाधारण अधिकार था। पर उच्च गणित के कई विषयों से वे लगभग अनजान थे। अपने गहन चिंतन और अपनी अपूर्व अंतः-प्रज्ञा से वे सीधे ही नतीजों पर पहुँच जाते थे। सूत्र या प्रमेय खोज लेते थे। पर प्रमेय की उपपत्ति प्रस्तुत करना उनके लिए सहज संभव नहीं होता था।

आधुनिक पश्चिमी गणित में उपपत्ति का बहुत महत्व है। पिछले करीब 300-350 साल में यूरोप के महान गणितज्ञों ने उपपत्ति की तकनीकों का खूब विकास किया है। रामानुजन को इन तकनीकों की समुचित जानकारी नहीं थी। दरअसल उनकी प्रतिभा को इनकी जरूरत भी नहीं थी। उन्हें तो इसकी भी स्पष्ट जानकारी नहीं थी कि यूरोप के गणितज्ञों ने क्या कुछ नया खोजा है। यही कारण है कि उनके प्रमेयों में कुछ ऐसे भी थे जिन्हें पहले के गणितज्ञ खोज चुके थे।

विशुद्ध गणित भी देर-सवेर उपयोगी बन ही जाता है। हार्डी और रामानुजन के गणितीय सिद्धांत भी धीरे-धीरे उपयोगी बनने जा रहे हैं। हार्डी के कुछ सिद्धांतों का क्वांटम सांख्यिकी (Quantum Statistics) और अनुवांशिकी (Genetics) के क्षेत्रों में उपयोग भी हुआ है। रामानुजन का रीमान के जीटा फंक्शन (Reimann Zeta function) से सम्बन्धित अनुसंधान कार्य का इस्तेमाल बेहतर वात भट्टियाँ (Furnaces) बनाने में उपयोगी सिद्ध हुआ। उनके कई सूत्र सुपर कम्प्यूटरों के लिए अब सशक्त अल्गोरिथ्म (Algorithm) बनते जा

रहे हैं और कुछ गणितीय सिद्धांत भौतिकी और परमाणु ऊर्जा (Atomic Energy) के क्षेत्रों में भी उपयोगी साबित होते जा रहे हैं।

### हार्डी एवं रामानुजन

**समानताएँ :** गणित के प्रति दोनों का दृष्टिकोण लगभग एक समान था। दोनों ही विशुद्ध गणित (Pure Mathematics) के आराधक थे। वे उस गणित को विशुद्ध मानते थे जो पूर्णतः निरूपयोगी हो। युद्ध से उन्हें घृणा थी और शायद इसीलिए उपयोगी या युद्धोपयोगी गणित से भी घृणा थी। रामानुजन भी विशुद्ध गणित के भक्त थे। दोनों की ही साधना का लक्ष्य था केवल गणित के लिए गणित की खोज करना। दोनों ही चाहते थे कि उनके गणितीय अनुसंधानों का युद्धोपयोगी साधनों के विकास के लिए कोई उपयोग न हो।

**असमानताएँ :** दोनों की शिक्षा-दीक्षा और आस्थाओं में बहुत अंतर था। हार्डी का जन्म 1877 में और रामानुजन का दस साल बाद 1887 में हुआ था। हार्डी ने गणित की विधिवत उच्च शिक्षा प्राप्त की थी और जब 1914 में रामानुजन उनके पास पहुँचे तो वे संसार के एक श्रेष्ठ गणितज्ञ के रूप में ख्याति पा चुके थे। दूसरी ओर, रामानुजन एफ.ए., में दो बार अनुत्तीर्ण होने के बाद आगे की पढ़ाई छोड़ देने को विवश हो गये थे। रामानुजन विवाहित थे जबकि हार्डी आजन्म अविवाहित रहे। हार्डी घोर नास्तिक थे, ईश्वर को अपना शत्रु मानते थे। रामानुजन आस्तिक थे। इंग्लैंड की प्रतिकूल परिस्थितियों में भी खान-पान की ब्राह्मण प्रथाओं का पालन करते थे और अपना निरामिष भोजन स्वयं पकाते थे।

**महत्वपूर्ण शोध क्षेत्र :** विभाजन सिद्धांत (Partition Theory) के शोधकार्य को लेकर उन्होंने महत्वपूर्ण योगदान किया। इस क्षेत्र में उन्होंने अपनी खोजबीन भारत में ही शुरू कर दी थी।

प्रो. हार्डी के सहयोग से विकसित किए गए उनके विभाजन सिद्धांत का थोड़ा जिक्र प्रासंगिक होगा। कोई भी धन पूर्णांक लीजिए। सवाल है— किसी धन पूर्णांक को अन्य पूर्णांकों

के योग के रूप में कितने प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है?

हम जानते हैं कि 3 को तीन प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है। यथा  $0+3$ ,  $1+2$  और  $1+1+1$

इसी तरह 4 को पाँच प्रकार से और 5 को सात प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है, जैसे-जैसे संख्या बड़ी होती जाती है, वैसे-वैसे उसके विभाजनों (Partitions) की संख्या भी तेजी से बढ़ती जाती है। उदाहरण के लिए संख्या 200 के 3972999029388 विभाजन संभव हैं। रामानुजन और हार्डी ने एक ऐसा सूत्र खोज निकाला जिसकी सहायता से बड़ी से बड़ी संख्या के लगभग सही-सही विभाजनों की जानकारी मिल जाती है। रामानुजन के सूत्रों का उपयोग करके कम्प्यूटर की सहायता से अब तक जिस सबसे बड़ी संख्या के विभाजनों को खोजा गया है, वह 14031 है। इस संख्या के विभाजनों की संख्या होगी 1 के आगे 126 शून्य रखने से बनने वाली संख्या।

रामानुजन की गणितीय प्रतिभा की चर्चा करते हुए हार्डी ने उनके बारे में लिखा है “मुझसे लोगों ने कई बार पूछा कि क्या रामानुजन के पास कोई जादू था? क्या उनकी चिन्तन प्रणाली औरों से भिन्न थी? इन सवालों का कोई ठीक जवाब मेरे पास नहीं था। मेरा विश्वास है कि गहराई में उतर जाने के बाद सभी गणितज्ञ एक ही जैसा सोचते हैं और रामानुजन इसका अपवाद नहीं थे।”

रामानुजन की अधिकांश गवेषणाएँ संख्या-सिद्धांत से सम्बन्धित हैं। उनकी इन गवेषणाओं को गणित के विशिष्ट संकेतों का उपयोग किए बिना समझना संभव नहीं है।

प्रसिद्ध घटना : रामानुजन की संख्याओं से गहरी दोस्ती थी। वे अंकों के साथ एक कुशल खिलाड़ी की तरह खेलते थे। रामानुजन जब एक सेनेटोरियम में स्वास्थ्य लाभ कर रहे थे तो डा. हार्डी टैक्सी करके उनसे मिलने गए। टैक्सी का नंबर 1729 था। इस संख्या 1729 =  $7 \times 13 \times 19$  का एक गुणनखंड 13 है, जिसे आमतौर पर यूरोप में 13 एक अशुभ संख्या

समझा जाता है। इसलिए रामानुजन के पास पहुँचते ही हार्डी ने सहज ही कहा कि 1729 तो एक अरुचिकर संख्या है।

रामानुजन ने फौरन उत्तर दिया, नहीं यह तो बड़ी दिलचस्प संख्या है। यह सबसे छोटी संख्या है जिसे दो घन संख्याओं के योग द्वारा निम्न दो रूपों में व्यक्त किया जा सकता है :

$$\begin{aligned} \text{जैसे- } 1729 &= (12^3 + 1^3) \\ &= (10^3 + 9^3) \end{aligned}$$

हार्डी यह जवाब सुनकर चकित रह गए। फिर उन्होंने पूछा, क्या आप चतुर्थ घात के लिए भी ऐसी कोई संख्या बता सकते हैं? रामानुजन का उत्तर था : ‘इस समय मुझे कोई उदाहरण नजर नहीं आ रहा, पर यह संख्या काफी बड़ी होनी चाहिए।’

रामानुजन ने ठीक अनुमान लगाया था। वह संख्या 635318657, जिसे चतुर्थ घात की दो संख्याओं के योग के रूप में दो-प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है।

संख्या 1729 के उपर्युक्त गुणधर्म की जानकारी उन्हें अपने विद्यार्थी जीवन से ही थी, क्योंकि उनके नोटबुक्स में यह प्रश्न मौजूद है। इंग्लैंड जाने के पहले रामानुजन ने अपनी गवेषणाओं को तीन नोट बुक्स में लिपिबद्ध किया था। इंग्लैंड के निवास काल में उन्होंने जो खोजें की वे एकदम नई थी। रामानुजन के नोटबुक्स का दो खण्डों में बम्बई के टाटा इंस्टिट्यूट आफ फंडामेंटल रिसर्च ने फोटोस्टेट संस्करण प्रकाशित किया है।

प्रथम महायुद्ध के दिनों में रामानुजन इंग्लैंड में थे। इंग्लैंड की प्रतिकूल जलवायु ने उन्हें 1917 में तपेदिक (Tuberculosis) टी.बी. का मरीज बना दिया। उनका इंग्लैंड के सेरीटोरियमों में इलाज करवाया गया। 27 मार्च, 1919 में जहाज से मुम्बई पहुँचे जहाँ से 2 अप्रैल, 1919 को रेलगाड़ी से मद्रास पहुँचे। उनके तपेदिक का इलाज कुदुमुडी, कुंभकोणम और मद्रास में साल भर तक चलता रहा, लेकिन उन्हें कोई लाभ नहीं हुआ।

अन्ततः 26 अप्रैल 1920 को मद्रास में बत्तीस साल की छोटी आयु में इस महान प्रतिभा का निधन हो गया।

रामानुजन की गवेषणाएँ संख्या सिद्धांतों (Number Theory) से सम्बन्धित हैं। संख्या सिद्धान्त को गणित का सबसे पुराना और जटिल विषय समझा जाता है। यहाँ तक कि बहुत से गणितज्ञों के लिए भी इन्हें सहज ही समझ पाना संभव नहीं है। अतः रामानुजन के बारे में कहा जा सकता है कि वे विशुद्ध गणितज्ञ थे। उनकी गणितीय गवेषणाएँ बेहद जटिल और उच्च स्तर की होने के कारण आज भी विश्वविद्यालयों के पाठ्यक्रमों में सम्मिलित नहीं हो पाई हैं। जब किसी महान वैज्ञानिक के कृतित्व को समझ पाना कठिन होता है तो उसके जीवन की कतिपय घटनाएँ ही हमारे लिए महत्वपूर्ण बन जाती हैं।

विगत करीब 50-60 वर्षों से देश और विदेश के अनेक गणितज्ञ उनकी नोटबुक्स के प्रमेयों पर अनुसंधान-कार्य करते आ रहे हैं और भविष्य में भी वर्षों तक गणितज्ञ रामानुजन द्वारा दिये गये परिणामों पर शोध करते रहेंगे।

—पूर्व प्राचार्य

राजस्थान उच्च शिक्षा सेवा, जयपुर, राजस्थान

## भगवान कहाँ नहीं?

एक विद्यालय में धर्म की कक्षा में अध्यापक पढ़ा रहे थे। बच्चे तल्लीनता के साथ उनकी बातों में रस ले रहे थे। तभी अध्यापक जी ने बच्चों में जिज्ञासा उत्पन्न करते हुए उनसे पूछा— भगवान कहाँ हैं?

बच्चे निरुत्तर एवं मौन ! सब एक-दूसरे की ओर टकटकी लगाकर देखने लगे। किसी को कोई उत्तर नहीं सूझ रहा था। तभी एक शिष्य ने खड़े होकर कहा— जी, मन्दिर में। अब तो सबके मुँह जैसे खुल गये। फटाक से दूसरे ने कहा— गिरजाघर में। तीसरे ने कहा— मस्जिद में और चौथे ने जैसे हाथ उठाते हुए जोर से कहा— जी गुरुजी, गुरुद्वारे में।

पाँचवें शिष्य को जब कोई पवित्र स्थान ध्यान में नहीं आया, तो खड़े होकर उसने गुरुदेव से पूछा— क्या आप बताने की कृपा करेंगे कि भगवान कहाँ नहीं हैं?

इस उत्तर पर गुरुदेव ने इस अन्तिम शिष्य को आशीर्वाद देते हुए हृदय से लगा लिया।

—वृद्धिचन्द गोठवाल, से.नि. व्याख्याता  
कपासन, चित्तौड़गढ़ (राज.)



## (1) वैदिक काल से सौ ईसवी तक :

भारत में गणित का इतिहास उतना ही पुरातन है जितनी उसकी संस्कृति। प्राचीनतम उपलब्ध ग्रन्थों, जिनका काल 5000 ई.पू. से 500 ई.पू. के मध्य का माना जाता है, जिनमें संहिता, ब्राह्मण साहित्य, वेदाङ्ग, आरण्यक ग्रन्थ तथा उपनिषद् मुख्य माने जाते हैं, हमें इनमें छितरा हुआ अंकगणित, क्षेत्रगणित, गणित-ज्योतिष का ज्ञान मिलता है।

वैदिक धर्म के मानने वालों को गृहस्थ जीवन में तीन प्रकार के यज्ञों को करना होता था, दक्षिणा, ग्रहपत्य तथा अहावानीय और इन अग्नियों के लिए जो वेदी बनाई जाती थी उनमें त्रिभुज, आयत, वर्ग तथा समकोण त्रिभुज की प्रमेय (पाइथागोरस नाम से जो वर्तमान में जानी जाती है) का ज्ञान आवश्यक था जिनका उल्लेख ऋग्वेद संहिता तथा तैत्तिरीय ब्राह्मण में मिलता है। गणित का ज्ञान हमें 'शुल्ब सूत्र' (रज्जू सूत्र) से मिलता है। रेखा गणित काफी समय बाद की देन है। बौद्धयान (600-500 B.C.), कात्यायन (400-300 B.C.) इत्यादि के कुछ सूत्र Euclid (330-275 B.C.) की प्रथम दो पुस्तकों में मिलते हैं। इससे प्रतीत होता है कि यूनान में ज्यामिति का विकास बाद की देन है।

ऐसी मान्यता है कि 1000-600 ई.पू. (B.C.) में आदिकवि वाल्मीकि ने रामायण महाकाव्य की रचना की तथा लगभग 700 ई.पू. में वैयाकरण पाणिनि ने संस्कृत व्याकरण को सुसम्पन्न किया और 600 ई.पू. के लगभग सुश्रुत ने आयुर्वेद तथा शल्य शास्त्र पर ग्रन्थ लिखे। 500 ई.पू. महावीर और गौतम बुद्ध ने धर्म एवं नीतिशास्त्र तथा निर्वाण मार्ग का उपदेश किया, जिससे जैन तथा बौद्ध साहित्य का विकास हुआ। ऐसा ज्ञात होता है कि 400 ई.पू. से लेकर 400 ईसवी (A.D.) तक का समय महत्वपूर्ण कार्यों तथा उन्नति का युग था। इसी काल में जैन तत्त्वज्ञानी 'उमास्वाति', वैयाकरण एवं दार्शनिक 'पतञ्जलि', राजनीतिज्ञ 'कौटिल्य', वैद्य 'चरक' एवं अमरकवि 'अश्वघोष' तथा 'कालिदास' उत्पन्न हुए। इसी काल में सौर, वशिष्ठ और पाराशर आदि ज्योतिष के महान सिद्धान्तों की

## प्राचीन भारत के प्रमुख गणितज्ञ

□ प्रो. जे.एल. बंसल

रचना हुई और दशमलव-स्थान मान संकेत परिष्कृत किया गया। वैदिक काल में विज्ञानों का विकास इसलिए हुआ कि वे धर्म के ज्ञान में सहायक थे।

छांदोग्य उपनिषद् में एक कथानक है कि किसी समय नारद मुनि सनत्कुमार ऋषि के पास गये और उनसे ब्रह्म विद्या पढ़ाने की प्रार्थना की। ऋषि ने नारद से पूछा कि अब तक कौन-कौन सी विद्या आपको ज्ञात हैं? उत्तर में नारद ने नक्षत्र विद्या, (ज्योतिष) और राशि विद्या (अंकगणित) का भी उल्लेख किया। इससे स्पष्ट होता है उस काल में लौकिक ज्ञान (अपरा विद्या) को आध्यात्मिक ज्ञान (परा विद्या) का सहायक अंग जाना जाता था। जैन एवं बौद्ध साहित्य में भी अंकगणित (संख्यान, सम्यक् ख्याति, right knowledge) को प्रमुख एवं श्रेष्ठतम कला माना गया है। जैनों के एक धार्मिक साहित्य का नाम 'गणित-अनुयोग' है। सूर्य प्रजनापति (500 B.C.), जम्बोद्वीप प्रजनापति (500 B.C.),

भगवती सूत्र (100 B.C.), 'उत्तराध्ययन सूत्र' (100 A.D.), अनुयोग-सूत्र (100 A.D.) आदि ग्रन्थ महत्वपूर्ण हैं। भद्रबाहु (298 B.C.) गया से आकर श्रवण बेलगोला, मैसूर, में बस गये थे और उन्होंने सूर्य प्रजनापति पर समीक्षा लिखी है।

कुसुमपुरा का विद्यालय (100 A.D.) जैन गणित के लिए प्रसिद्ध था जहाँ उमास्वाति ने तत्त्वार्थ अधिगम सूत्र भाष्य लिखा था। सूर्य प्रजनापति में  $\sqrt{10}$  जो कि  $\pi$  के मान के तुल्य प्रयोग किया जाता था उसका मान दशमलव के 13 स्थान तक शुद्ध रूप में ज्ञात किया गया था और उस समय विश्व में जीवों की संख्या  $2^{96}$  बताई गई है। जैनों को क्रमसंचय (Permutation) और संचय (Combination) का भी उचित ज्ञान था। प्राचीन बौद्ध साहित्य 'विनयपिटक' में तीन प्रकार के गणित का उल्लेख मिलता है— (1) मुद्रा, (2) गणना, तथा (3) संख्या गणित की क्रियाएँ पाटी पर खड़िया से या धूल बिछाकर किसी नुकीली कलम से की जाती थी, इसलिए 'पाटीगणित' तथा 'धूलीकर्म' शब्दों का प्रयोग हुआ। वैदिक हिन्दुओं ने गणना का आधार 10 बनाया था और यजुर्वेद संहिता में  $10^{12}$  तक जैसी संख्याओं का नामकरण मिलता है।  $1$  (एक),  $10$  (दस),  $10^2$  (शत),  $10^3$  (सहस्र),  $10^4$  (अयुत),  $10^5$  (नियुत),  $10^6$  (प्रयुत),  $10^7$  (अर्बुद),  $10^8$  (न्यर्बुद),  $10^9$  (समुद्र),  $10^{10}$  (मध्य),  $10^{11}$  (अन्त),  $10^{12}$  (परार्ध)।

(2) 200 ईसवी से 800 ईसवी तक : (i) आर्यभट्ट प्रथम (476 A.D.) कुसुमपुरा से थे परन्तु उनका जन्म केरल में हुआ था। उनके 'आर्यभट्टीय' ग्रन्थ में 'गीतिकापाद' (10 श्लोक) तथा 'गणितपाद' (33 श्लोक) गणित से सम्बन्धित हैं। इनमें त्रिकोणमिति के ज्या, कोज्या तथा संख्याओं के लिए अंक संज्ञाएँ (अक्षर संकेत) मिलती हैं। इनके शिष्य पांडुरङ्ग



प्रो. जे.एल. बंसल

प्रो. जे.एल. बंसल, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर में गणित के आचार्य और विभागाध्यक्ष रहे हैं। वहाँ आपने अपनी सेवाएँ विज्ञान संकाय के डीन, डाइरेक्टर तथा प्राचार्य, महाराजा महाविद्यालय, जयपुर के रूप में दीं। इसके अलावा आपने एस.एम. तथा सेन्ट जॉन्स महाविद्यालय, आगरा विश्वविद्यालय, जयनारायण विश्वविद्यालय, जोधपुर में भी अध्यापन किया। वर्तमान में आप अपना अधिकांश समय वेदान्त के अध्ययन, अध्यापन और लेखन को दे रहे हैं।

स्वामी, लतादेव, प्रभाकरन, निशंकु प्रमुख हैं।

(ii) वराहमिहिर (505 A.D.) ज्योतिष शास्त्र तथा नक्षत्र शास्त्र के लिए प्रसिद्ध हैं। इन्होंने 'पंच सिद्धान्तिका' नामक ग्रन्थ लिखा है, जिसके आधार पर हिन्दू कलेण्डर बनाया गया है।

(iii) भास्कर प्रथम (600 A.D.) ने 'महाभास्करिय', 'लघुभास्करिय' तथा आर्यभट्टीय पर व्याख्या लिखी हैं। इसमें नक्षत्र शास्त्र तथा अनिश्चित समीकरण प्रथम घात के बारे में अज्ञात राशि समीकरण के रूप में प्राप्त होता है।

(iv) ब्रह्मगुप्त (598 A.D.) उज्जैन विद्यालय के थे जिन्होंने 'ब्रह्मस्यूतसिद्धान्त' नामक ग्रन्थ लिखा जिसमें कुट्टक (अव्यक्त गणित) शब्द का प्रयोग किया जो वर्तमान में बीजगणित कहलाता है। उन्होंने समीकरण  $Nx^2+1=y^2$  के विभिन्न हल दिये। इस ग्रन्थ का (700 A.D.) में अरबी में अनुवाद हुआ

था। इसके आधार पर 'Hisab al-jabra w'al-magabala' (830 A.D.) मुहम्मद इब्न अल रज्जारिज्मी (बगदाद) द्वारा बीजगणित (Algebra) शब्द प्रयोग में आया।

(3) 800 ईसवी के पश्चात् :

(v) महावीराचार्य (850 A.D.) ने 'गणितसारसंग्रह' नामक ग्रन्थ लिखा यह गणित के आठ परिक्रमों (संक्रियाओं) पर आधारित है। योग (संकलन), घटाना (व्यकलन), गुणन, भाग, वर्ग, वर्गमूल, घन तथा घनमूल।

(vi) 'आर्यभट्ट द्वितीय' (950 A.D.) ने 'महासिद्धान्त ग्रन्थ' लिखा। इसमें कुट्टक अध्याय (अज्ञात राशि समीकरण Diaphantine equations) तथा शून्य के साथ क्रियाएँ भी सम्मिलित हैं।

(vii) भास्कर द्वितीय (1114 A.D.) बीजापुर मैसूर से थे। इन्होंने 'सिद्धान्त शिरोमणि' नामक ग्रन्थ लिखा है। लीलावती, बीजगणित, गोलअध्याय तथा ग्रह गणित इसके चार भाग

हैं। लीलावती पर जिन अनेक गणितज्ञों ने लिखा है उनमें नारायण (1350 A.D.), गंगाधर (1420 A.D.), गणेश (1540 A.D.), सूर्यदास (1541 A.D.) तथा रंगनाथ (1573 A.D.) प्रमुख हैं।

इसके उपरान्त राजनीतिक उथल पुथल के कारण गणित में एक दो गणितज्ञों को छोड़कर 19वीं शताब्दी तक विशेष योगदान नहीं मिलता है। इनमें श्रीनिवास रामानुजन (1887-1920 A.D.) तथा जयपुर के महाराजा सवाई जयसिंह (1686-1743 A.D.) प्रमुख हैं।

जगद्गुरु शंकराचार्य (स्वामी भारती कृष्ण तीर्थ, गोवर्धन पीठ, जगन्नाथपुरी के शंकराचार्य (1884-1960 A.D.) ने अपनी पुस्तक 'वैदिक गणित' में 16 सूत्रों द्वारा एक नई चेतना का विकास किया है, जिन्हें आधार बनाकर संक्रियाओं पर आधारित गणित के प्रश्नों का हल सरलता से संभव है।

-12, रत्नापुरी, सोडाला, जयपुर

प्राचीन काल से ही भारत का गणितीय अध्ययन अत्यन्त गौरवशाली रहा है। संख्या विज्ञान, संख्या प्रतीकवाद, बीजगणित, त्रिकोणमिति तथा खगोलशास्त्र में भारतीय गणितज्ञों ने उत्कृष्ट कोटि का आधारभूत कार्य किया है। वैदिक काल की गणित को आगे बढ़ाने में आर्यभट्ट-प्रथम, भास्कर-प्रथम, ब्रह्मगुप्त, महावीर, आर्यभट्ट-द्वितीय, श्रीधर, श्रीपति, भास्कर-द्वितीय जैसे गणितज्ञों का महान योगदान रहा है लेकिन आर्यभट्ट-प्रथम द्वारा किया गया गणितीय तथा खगोल शास्त्र का अध्ययन अतुलनीय है।

आर्यभट्ट-प्रथम ही बीजगणित की अवधारणा के प्रतिपादक थे। वैदिक काल से प्रचलित अंकों की दाशमिक प्रणाली को आर्यभट्ट-प्रथम ने ही परिष्कृत रूप प्रदान किया।

महान आर्यभट्ट-प्रथम का जन्म विक्रमी संवत् 533 (476 ई.) में हुआ था। आर्यभट्ट-प्रथम के जन्मकाल की जानकारी उनके महान ग्रन्थ आर्यभट्टीय में मिलती है। ग्रन्थ में उन्होंने कहा है कि "कलियुग के 3600 वर्ष बीत चुके हैं और मेरी आयु 23 वर्ष की है जबकि मैं यह ग्रन्थ लिख रहा हूँ।" अतः प्रचलित भारतीय

काल गणना के अनुसार आर्यभट्टीय 499 ई. में लिखा गया था।

आर्यभट्ट-प्रथम के जन्म स्थान के विषय में सभी विद्वानों के मत समान नहीं हैं, लेकिन आर्यभट्ट-प्रथम का कार्यक्षेत्र कुसुमपुर (वर्तमान पटना, बिहार) था। उन्होंने अपना गणितीय तथा खगोल शास्त्र का उच्च अध्ययन तथा अन्वेषण कुसुमपुर में ही किया था।

## भारत के महान गणितज्ञ

### आर्यभट्ट-प्रथम

□ शशिकान्त

आर्यभट्ट-प्रथम के कार्यों की प्रत्यक्ष जानकारी का एकमात्र स्रोत उनके द्वारा रचित महान रचना आर्यभट्टीय ही है जो आज भी उपलब्ध है। संभवतया उनकी रचना आर्यभट्टीय का नाम भी उनके शिष्यों अथवा बाद के महान टीकाकारों ने दिया। स्वयं भास्कराचार्य ने इस ग्रन्थ का अश्मक तन्त्र के नाम से उल्लेख किया है।

आर्यभट्टीय अन्य भारतीय वैदिक ग्रन्थों की तरह छन्द शैली में लिखा गया है। आर्यभट्ट-प्रथम की प्रखर प्रतिभा का आभास इस ग्रन्थ में होता है। ग्रन्थ की प्रत्येक पंक्ति एक जटिल गणितीय सूत्र अथवा परिणाम को व्यक्त करती है। ग्रन्थ की छन्द शैली गणितीय सूत्रों को याद रखने में मददगार रहती है। आर्यभट्टीय में कुल 121 श्लोक हैं तथा विषयानुसार इस ग्रन्थ को चार भागों में बाँटा गया है—

1. गीतिका पाद (13 श्लोक)
2. गणित पाद (33 श्लोक)
3. काल क्रिया पाद (25 श्लोक)
4. गोला पाद (50 श्लोक)

आर्यभट्टीय गणित की विभिन्न शाखाओं यथा अंकगणित, बीजगणित, ज्यामिति, संख्या सिद्धान्त, त्रिकोणमिति तथा खगोल शास्त्र का समावेश करता है।

आर्यभट्ट-प्रथम को बीजगणित को प्रारम्भ करने का श्रेय दिया जाता है। उन्होंने अपने कार्य में संख्याओं को निरूपित करने के लिए स्वरो तथा व्यंजनों का प्रयोग किया। इस प्रकार गणितीय समस्याओं में बीजगणितीय भाषा का प्रयोग शुरू हुआ। आर्यभट्ट-प्रथम ने अ, आ,

इ, ई इत्यादि को  $10^0$ ,  $10^1$ ,  $10^2$ ,  $10^3$  इत्यादि से प्रकट किया।

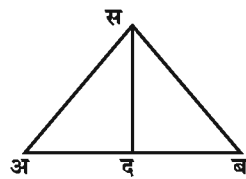
आर्यभट्ट-प्रथम ने आर्यभटीय में महत्वपूर्ण सूत्र—  $(a+b)^2 = (a)^2 + 2a \times b + (b)^2$  का उल्लेख किया है। भास्कराचार्य की आर्यभटीय पर टीका के अनुसार  $ax+b=c$  को हल करने का प्रयास सर्वप्रथम आर्यभट्ट-प्रथम ने ही किया। रैखिक समीकरणों के साथ-साथ आर्यभट्ट-प्रथम ने सर्वसमिकाओं का भी सर्वप्रथम अपने कार्य में प्रयोग किया।

श्रेढ़ियों के उदाहरण देकर  $1^2+2^2+3^2+...+n^2$  तथा  $1^3+2^3+3^3+...+n^3$  को हल करने का सूत्र आर्यभट्ट-प्रथम ने सर्वप्रथम ज्ञात किया। गुणोत्तर श्रेढ़ियों के योग का नियम आर्यभट्ट-प्रथम ने ही प्रतिपादित किया तथा यज्ञ वेदियों का निर्माण  $ax^2+bx+c=0$  समीकरण के हल के आधार पर किया। वर्गमूल तथा घनमूल निकालने की विधियाँ आर्यभटीय में उपलब्ध हैं।

आर्यभट्ट-प्रथम आधुनिक काल में पहले ऐसे गणितज्ञ थे जिन्होंने  $\pi$  का दशमलव : चार स्थान तक सही मान सर्वप्रथम विश्व को दिया। साथ ही इस मान को भी आसन्न (लगभग) बताया, जिससे पाई के अपरिमेय होने का एक प्रथम प्रमाण माना जा सकता है। आर्यभटीय में उन्होंने लिखा है— *चतुरधिकं शतमण्डगुणं द्वाष्ट्रिस्तया सहस्राणां।/अयुतद्वय विश्कम्भस्य आसन्नो वृत परिणाहः॥* अर्थात् सौ में चार जोड़कर इसे आठ से गुणा करें तथा बासठ हजार जोड़ दें। जो योग आयेगा वह बीस हजार व्यास वाले वृत की परिधि होगी। अर्थात्  $\pi$  परिधि/व्यास =  $62832/20000 = 3.1416$

आर्यभटीय में त्रिभुज, चतुर्भुज, वर्ग तथा वृत का क्षेत्रफल निकालने की विधियों का विस्तार से उल्लेख किया गया है। त्रिभुज के क्षेत्रफल निकालने की विधि के बारे में लिखा है— *त्रिभुजस्य फलशरीरं समदल कोटी भुजाथसंवर्गः।*

अर्थात् त्रिभुज का क्षेत्रफल उसके लम्ब तथा लम्ब के आधार वाली भुजा के आधे के गुणनफल के बराबर होता है।

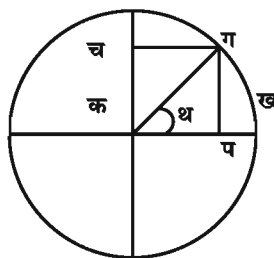


$$\text{क्षेत्रफल अ ब स} = \frac{1}{2} \text{अ ब} \times \text{स द}$$

आर्यभट्ट-प्रथम ने अपने ग्रंथ में ज्या तथा कोटिज्या उल्लेख किया है जो कि आज कल साइन तथा कोसाइन नाम से जाने जाते हैं। वास्तव में ज्या शब्द धनुष की डोरी से आया है। आगे के चित्र में ख ग आधे धनुष के जैसा है तथा ग ध उसकी डोरी (ज्या) जैसा है। आर्यभट्ट के अनुसार—

ग प = त्रिज्या (क ग) × ज्या 'थ'

ग च = त्रिज्या (क ग) × कोटिज्या 'थ'



जिनको आजकल सामान्य भाषा में  $\sin \theta = \text{लम्ब/कर्ण}$  तथा

$\cos \theta = \text{आधार/कर्ण}$  कहा जाता है।

आर्यभट्ट ने विभिन्न कोणों ( $0^\circ$  से  $90^\circ$  के मध्य) के लिए ज्या (साइन) के मान निकालकर उनकी सारिणी भी दी है।

आर्यभट्ट प्रथम ने गेलीलियो से लगभग 1000 वर्ष पहले ही बता दिया था कि पृथ्वी अपने अक्ष पर घूमती है जिसका गोलापाद अध्याय में इस प्रकार उल्लेख है— *अनुलोमगतिनैस्यः पश्यत्यचलम् विलोमं यदवत्।/अचलानि भानि तदवत् सम पश्चिमगानि लंकायाम्॥*

अर्थात् 'नाव में यात्रा करने वाला जिस प्रकार किनारे पर स्थिर रहने वाले चट्टान, पेड़ इत्यादि को विरुद्ध दिशा में भागते देखता है, उसी प्रकार अचल नक्षत्र लंका से सीधे पूर्व से पश्चिम की ओर सरकते देखे जा सकते हैं।' जो कि पृथ्वी के अपने अक्ष में घूर्णन को व्यक्त करता है।

आर्यभट्ट लिखते हैं— प्राणे नैति कलां भूः अर्थात् एक प्राण समय में पृथ्वी एक कला घूमती है। पृथ्वी के गोलाकार होने के कारण अलग-अलग स्थान पर अलग-अलग समय सूर्य के उदय तथा अस्त होते हैं इसकी स्पष्ट जानकारी वे आर्यभटीय में गोलापाद अध्याय में देते हैं।

चन्द्रग्रहण तथा सूर्यग्रहण का कारण राहू या केतु को न मानकर उन्होंने इन घटनाओं का वैज्ञानिक कारण दिया, आर्यभटीय में स्पष्ट है कि— *छादयति शशी सूर्य शशिनं महती च भूच्छाया।*

अर्थात् जब पृथ्वी की छाया चन्द्रमा पर पड़ती है तब चन्द्रग्रहण तथा चन्द्रमा जब सूर्य तथा पृथ्वी के, मध्य आता है तब सूर्यग्रहण होता है। आर्यभट्ट-प्रथम ने बताया कि पृथ्वी, ग्रह तथा चन्द्रमा में स्वयं का प्रकाश नहीं है जबकि ये सभी सूर्य के प्रकाश से प्रकाशित होते हैं।

आर्यभट्ट प्रथम ने सूर्य से विभिन्न ग्रहों की दूरी का सही मान विश्व को प्रदान किया।

इस प्रकार इस संक्षिप्त अवलोकन से हम कह सकते हैं कि आर्यभट्ट प्रथम का गणित तथा खगोल विज्ञान में अतुलनीय योगदान रहा है। आर्यभट्ट प्रथम के बाद में भी बराहमिहिर (506 ई.), ब्रह्मगुप्त (598 ई.), महावीराचार्य (850 ई.), श्रीधर (900 ई.), आर्यभट्ट द्वितीय (950 ई.), भास्कराचार्य (1114 ई.) आदि ने गणित की उत्कृष्ट अध्ययन की परम्परा को आगे बढ़ाया। आज हमें इन सभी महान वैज्ञानिकों से प्रेरणा लेकर पुनः भारत को विश्व में गणितीय अध्ययन के क्षेत्र में शिखर पर पहुँचाना है।

भारत सरकार के स्तर से वर्ष 2012 को महान गणितज्ञ श्रीनिवास रामानुजन के 125वीं जयंती के उपलक्ष्य में गणित वर्ष घोषित किया जाना निश्चय ही हमारी नई पीढ़ी को हमारे गौरवशाली गणितीय इतिहास का परिचय कराने में मददगार साबित होगी तथा आशा है कि हम पुनः गौरवशाली ऊँचाइयों को छूने का प्रयास करेंगे।

—व्याख्याता, गणित

राजकीय डूंगर महाविद्यालय, बीकानेर

अठारहवीं सदी के अंत में, एक जर्मन हाईस्कूल गणित शिक्षक, विलियम वॉन ऑस्टन (Williom von Oster) ने अपने गृह नगर बर्लिन में कुछ ऐसी वैज्ञानिक खोज की जो उससे पहले कभी नहीं की गई थी। अन्य चीजों के साथ ही वॉन ऑस्टन फर्नोलॉजी (Phernology) के भी विद्यार्थी थे। जो किसी के सिर के आकार के आधार पर बुद्धिमता, चरित्र व व्यक्तित्व विश्लेषण के सिद्धांत के तौर पर जानी जाती है। जंतु बुद्धिमता में वॉन ऑस्टन की गहन रुचि ने अन्ततः उन्हें असाधारण प्रसिद्धि दिलाई।

वॉन ऑस्टन का दृढ़ता से विश्वास था कि मानव जाति ने पशुओं के तर्क-कौशल एवं बुद्धिमता को बहुत ही कम करके आँका था। अपनी इस परिकल्पना का परीक्षण करने के लिए उन्होंने एक बिल्ली, घोड़े और भालू को गणित का प्रशिक्षण देने का निर्णय लिया। बिल्ली उनके प्रयासों के प्रति उदासीन रही एवं भालू का व्यवहार अत्यन्त हिंसक रहा परन्तु अरबी घोड़ा, जिसका नाम हेन्स था, में वास्तव में कुछ सकारात्मक परिणाम परिलक्षित हुए।

वॉन ऑस्टन द्वारा हेन्स को प्रदान किये गये अग्रिम प्रशिक्षण के फलस्वरूप हेन्स घोड़ा अपने खुरों की थाप से श्यामपट्ट पर लिखी संख्याओं को इंगित करना सीख गया। वॉन ऑस्टन के लिए वह अत्यन्त प्रसन्नता का क्षण होता था जब ऑस्टन द्वारा श्यामपट्ट पर '3' अंक लिखने पर हेन्स अपने खुर द्वारा तीन बार 'थप-थप-थप' की ध्वनि करता था एवं दस के अन्तर्गत किसी भी अंक हेतु उसकी समान प्रतिक्रिया होती थी। इस सफलता से उत्साहित वॉन ने अपने शिष्य हेन्स को और प्रोत्साहन प्रदान किया। इस गणितज्ञ ने अंकगणित के कुछ आधारभूत समस्याओं को चॉक बोर्ड पर लिखा और अपने शिष्य (हेन्स) को इन गणितीय प्रतीकों को समझने के लिए प्रशिक्षित करना प्रारम्भ किया। हेन्स को अपने पाठ्यक्रम से कोई परेशानी नहीं हुई तथा शीघ्र ही उसने गणित की विभिन्न समस्याओं/प्रश्नों जैसे वर्ग-मूल एवं भिन्न इत्यादि के प्रति समुचित प्रतिक्रिया प्रदान

## चतुर हेन्स : गणितज्ञ घोड़ा

□ प्रो. उज्ज्वल पाण्डे

करना प्रारम्भ कर दिया। और इस प्रकार हेन्स वास्तव में एक चतुर घोड़ा प्रदर्शित होने लगा।

सन् 1891 के प्रारम्भ में वॉन ऑस्टन ने घोड़े की गणितीय दक्षता को सिद्ध करने के लिए सम्पूर्ण जर्मनी में 'चतुर हेन्स' का प्रदर्शन करना प्रारम्भ किया। इस नाम के प्रसार के साथ ही ऑस्टन की प्रदर्शनियों ने अधिक से अधिक उत्सुक भीड़ को आकर्षित करना प्रारम्भ कर दिया। अपनी ही इन प्रदर्शनियों में वॉन एवं हेन्स ने शायद ही कभी किसी को निराश किया हो।

हेन्स जो कि अब मौखिक प्रश्नों के जवाब देना सीख चुका था, से जब वॉन ऑस्टन पूछता, "यदि माह के पहले दिन बुधवार है" तो "आने वाले सोमवार को क्या तारीख होगी? तो हेन्स अपने खुरों से '6 थाप' करके सही तारीख बताता।" 16 का वर्गमूल क्या है? तो 'हेन्स' '4 थाप' देता। वॉन ऑस्टन चकित भीड़ को यह भी बताता था कि हेन्स शब्दों को भी बता सकता है, जहाँ वह ए को बताने के लिए 'एक थाप', 'बी' को बताने के लिए 'दो थाप' तथा इसी प्रकार अन्य वर्णों को बताने के लिए थापों का उपयोग करता था। कुछ जान-पहचान वाले व्यक्तियों के नाम बताकर तथा सरल प्रश्नों के प्रति प्रतिक्रिया जाहिर कर 'हेन्स' अपनी इस प्रतिभा का प्रदर्शन करता था। यद्यपि वह यदा-कदा गलतियाँ करता था परन्तु उसकी दक्षता 89% पाई गई। कुछ गणनाओं में हेन्स की गणित पर पकड़ एक 14 वर्षीय बालक के समान पाई गई। हेन्स की इस प्रतिभा पर स्वाभाविक रूप से कई संशय व्यक्त किये गये। यह संशय और भी प्रबल हो गया जब न्यूयॉर्क टाइम्स ने अपने मुख्य पृष्ठ पर इस 'कुशल घोड़े' की कहानी छपी। अतः जर्मनी के शैक्षिक बोर्ड ने हेन्स की योग्यताओं का स्वतंत्र अन्वेषण प्रस्तावित किया एवं वॉन ऑस्टन इसके लिए तैयार हो गये। चूँकि वह वैज्ञानिक थे एवं विज्ञान से जुड़े थे अतः वह

अच्छी तरह जानते थे कि इसमें कोई धोखा नहीं है। इस 'हेन्स कमीशन' में शामिल होने के लिए दो प्राणि-शास्त्रियों, एक मनोविज्ञानी, एक अश्व-प्रशिक्षक, अनेक विद्यालयी शिक्षकों एवं एक सर्कस प्रबंधक को शामिल किया गया। इस स्वतंत्र जाँच के फलस्वरूप सन् 1904 में इस कमीशन (आयोग) द्वारा यह निष्कर्ष निकाला गया कि हेन्स की प्रतिक्रिया में कोई चाल नहीं थी एवं हेन्स की यह प्रतिभा बिल्कुल वास्तविक थी।

तत्पश्चात् हेन्स कमीशन ने इस जाँच को एक मनोवैज्ञानिक "आस्कर फंगस्ट" (Oskar Pfungst) को सौंप दिया। जिनके पास इस रहस्य को सुलझाने के नवीन विचार थे। फंगस्ट ने अपने परीक्षणों के लिए एक विशाल टेन्ट लगाया ताकि बाह्य दृश्य उद्दीपनों के दूषित प्रभावों को हटाया जा सके। उचित परिणाम प्राप्त हों, इसके लिए फंगस्ट ने प्रश्नों को एक लम्बी सूची तैयार की तथा उन सभी चरों को सावधानीपूर्वक लिखा जिनका निर्धारण किया जाना था। इस प्रकार फंगस्ट ने हेन्स की पूछताछ प्रारम्भ की।

आशानुरूप हेन्स ने बहुत अच्छी प्रतिक्रिया दी, जब वॉन ऑस्टन द्वारा प्रश्न पूछे गये। सामान्य परिस्थितियों में अन्य प्रश्नकर्ताओं के द्वारा प्रश्न पूछने पर उसे दक्षता हेतु अच्छे अंक प्राप्त हुए। परन्तु जब भी प्रश्नकर्ता अधिक दूरी पर खड़े हुए तो कुछ दिलचस्प घटित हुआ; घोड़े की दक्षता में कुछ गिरावट दिखाई दी, परन्तु इसका कारण तुरन्त पता नहीं चल पाया। यह अंतिम दो चर थे जो कि अत्यन्त खुलासा करने वाले साबित हुए। जब प्रश्नकर्ता किसी प्रश्न का जवाब पहले से नहीं जानता था तो हेन्स की प्रतिक्रिया की सटीकता लगभग शून्य थी। इसी प्रकार जब प्रश्नकर्ता को हेन्स से पूरी तरह छुपाया गया तब भी सटीकता लगभग शून्य रही। इससे



ऐसा प्रतीत हुआ कि हेन्स की सटीकता उसके, सही जवाब जानने वाले व्यक्ति को उचित प्रकार से देख पाने पर निर्भर करती थी। अनुसंधानकर्ताओं ने यह प्रमाण भी प्राप्त किया कि लगातार ऐसे प्रश्न पूछने पर जिनके जवाब हेन्स नहीं जानता था, वह काटने को दौड़ता था।

फंगस्ट ने अपने परीक्षणों को जारी रखा, परन्तु अब उसने हेन्स के साथ मानव की अंतःक्रियाओं पर अवलोकन को बल दिया। मनोवैज्ञानिक ने तुरन्त देखा कि प्रत्येक प्रश्नकर्ता की खास, मुद्रा तथा भाव प्रत्येक थाप के साथ बदल जाते थे। तथा तनाव में मामूली सी वृद्धि दिखाई पड़ती थी। जब सही थाप होती थी तो प्रश्नकर्ता के चेहरे से तनाव अचानक गायब हो जाता था, जिसे हेन्स थाप रोकने का एक संकेत समझता था। फंगस्ट ने यह भी पाया कि यह तनाव प्रश्नकर्ता के सही जवाब से अनभिज्ञ होने पर नहीं दिखता था जिसके परिणाम स्वरूप हेन्स को आवश्यक संकेत प्राप्त नहीं होते थे।

यद्यपि परीक्षण में दृढ़ता से यह प्रदर्शित किया कि हेन्स को शायद गणित की वास्तविक समझ नहीं थी, परन्तु इसने एक विलक्षण दृष्टि को प्रदर्शित किया। हेन्स में यह बुद्धि नहीं थी कि वो प्रश्नों का जवाब दे सके, वह प्रश्नकर्ताओं में सार्वभौमिक रूप से उपस्थित सूक्ष्म व स्वाभाविक लक्षणों/संकेतों के प्रति प्रतिक्रियात्मक था। इस बात के भी प्रमाण प्राप्त हुए कि घोड़ों में अगोचर शारीरिक संकेतों के प्रति संवेदना हो सकती है और यह शायद अन्य घोड़ों के साथ उनकी सामाजिक अंतःक्रिया का एक भाग होता है।

जब एक बार फंगस्ट को इन संकेतों की जानकारी हो गई तो वह स्वयं को 'घोड़े' की भूमिका में रखकर, अनुसंधानकर्ताओं के प्रश्नों पर उसके उत्तरों को थपथपाकर तथा उनकी शारीरिक मुद्राओं पर नजर रखकर, हेन्स की दक्षता को चुनौती देने लगा। इससे भी अधिक दिलचस्प बात थी कि फंगस्ट ने यह खोजा कि प्रश्नकर्ता यह बात जानते हुए भी इन सूक्ष्म संकेतों के प्रदर्शन से स्वयं को रोकने में असमर्थ थे।

बीच के वर्षों में, यह पाया गया कि अधिकांश जानवर अपने मालिकों से प्राप्त होने वाले इन संकेतों के प्रति संवेदनशील होते हैं।

वर्तमान में शब्द 'चतुर हेन्स प्रभाव' (Clever Hans Effect) का उपयोग प्रश्नकर्ताओं के सूक्ष्म व स्वाभाविक संकेतों का उनके प्रतिवादियों पर प्रभाव को बताने में किया जाता है। चाहे वह मानवों में हो अथवा जानवरों में। पूर्वधारणाओं एवं पूर्वज्ञान से बचने के लिए वर्तमान विज्ञान में डबल ब्लाइन्ड विधि (Double Blind Method) का उपयोग किया जाता है जिसमें अनुसंधानकर्ता एवं प्रतिवादी दोनों ही परीक्षण की विभिन्न सूचनाओं से अनजान रखे जाते हैं जब तक कि परीक्षण पूर्ण नहीं हो जाता है तथा परिणाम रिकॉर्ड नहीं कर लिये जाते हैं। उदाहरणस्वरूप दवा सूँघने वाले कुत्तों को जब प्रशिक्षण दिया जाता है तो उपस्थित व्यक्तियों में से कोई नहीं जानता है कि किस डब्बे में दवा है, अन्यथा उनकी शारीरिक मुद्रा डब्बे के बारे में बता सकती है एवं इस प्रकार पूरा अभ्यास निष्फल हो सकता है। Wilhelan Von Osten ने कभी भी चतुर हेन्स स्पष्टीकरण को स्वीकार नहीं किया फलस्वरूप वह और उसका घोड़ा गणित एवं शारीरिक मुद्रा-प्रदर्शन (Math and body languageshow) को कुछ समय तक पूरे जर्मनी में दिखाते रहे। अपने पूरे काल में यह जोड़ी बड़ी। वृहद व उत्साही भीड़ को आकर्षित करने में सफल रही। हालांकि हेन्स घोड़ा गणित के बारे में कुछ भी नहीं जानता था तथा जर्मन पर भी उसकी पकड़ कमजोर थी, बहुत से लोगों को लंबे समय तक मूर्ख बनाने की उसकी योग्यता ने उसे चतुरता का एक वैधानिक तमगा प्रदान कर दिया। मानवों की स्वाभाविक अनकही बातों को समझ पाने के उपहार के अतिरिक्त एक संदेह भी है कि कुछ संदेहों एवं अविभाज्य वर्ग के एक बड़े समूह के कारण हेन्स केवल एक खेल का जरिया बन कर रह गया। सन् 1909 में वॉन ऑस्टन की मृत्यु के पश्चात् हेन्स बहुत से मालिकों के साथ रहा। यह माना जाता है कि इस घोड़े का उपयोग प्रथम विश्व युद्ध में भी किया गया। सन् 1916 के पश्चात् उसका कोई दस्तावेज प्राप्त नहीं हुआ तथा उसका भाग्य अनजाना गुमनाम रहा।

—रीडर, विभागाध्यक्ष

मरुधर इंजीनियरिंग कॉलेज, बीकानेर

## भारतीय गणितज्ञों की तिथिवार सूची

गणितज्ञ	तिथि/वर्ष
1. बोधायन	800 ई.पू.
2. मानव	750 ई.पू.
3. आपस्तम्ब	600 ई.पू.
4. पाणिनि	520 ई.पू.
5. कात्यायन	200 ई.पू.
6. यवनेश्वर	120 ई.पू.
7. आर्यभट-1	476 ई.
8. यातिवृषभ	500 ई.पू.
9. वराहमिहिर	500 ई.पू.
10. ब्रह्मगुप्त	598 ई.
11. भास्कर-1	600 ई.
12. लल्ला	720 ई.
13. गोविंद स्वामी	800 ई.
14. महावीराचार्य	814 ई.
15. पृथुदक्स्वामी	830 ई.
16. शंकर नारायण	840 ई.
17. श्रीधर	870 ई.
18. आर्यभट-2	920 ई.
19. विजयनंदी	940 ई.
20. श्रीपति	1019 ई.
21. ब्रह्मदेव	1060 ई.
22. भास्कर-2	1114 ई.
23. महेंद्र सूरी	1340 ई.
24. नारायण पंडित	1340 ई.
25. माधव	1350 ई.
26. परमेश्वर	1370 ई.
27. नीलकंठ सोमायाजी	1444 ई.
28. ज्येष्ठदेव	1500 ई.
29. कमलाकर	1616 ई.
30. जगन्नाथ सम्राट्	1690 ई.
31. श्रीनिवास आर्यंगर रामानुजन	1887 ई.
32. कदंबधर तिरुर्वेकटचारलू	1903 ई.
राजगोपाल	
33. हरिश्चंद्र	1923 ई.
34. चिदंबरम पद्मनाभन	1938 ई.
रामानुजन	

सर आइजैक न्यूटन इंग्लैण्ड के एक वैज्ञानिक थे। वे एक महान गणितज्ञ, ज्योतिष एवं दार्शनिक थे। उनका जन्म 4 जनवरी 1643 को लिनकोलनशायर के काउंटी में एक हेमलेट वूल स्थोपे बाय कोल्स्तेवोर्थ में वूलस्त्रोप मेनर में हुआ। न्यूटन के जन्म के समय इंग्लैण्ड ने ग्रेगोरियन कैलेंडर को नहीं अपनाया था। इसलिए उनके जन्म की तिथि को क्रिसमस दिवस 25 दिसम्बर 1642 के रूप में दर्ज किया गया।

न्यूटन का जन्म उनके पिता की मृत्यु के तीन माह बाद हुआ। उनके पिता एक समृद्ध किसान थे, उनका नाम भी आइजैक न्यूटन था। बारह वर्ष से सत्रह वर्ष की आयु तक उन्होंने दि किंग्स स्कूल, ग्रान्थम में शिक्षा प्राप्त की। इस विद्यालय की एक खिड़की पर आज भी उनके हस्ताक्षर देखे जा सकते हैं।

जून 1661 में उन्हें ट्रिनिटी कॉलेज कैम्ब्रिज में एक सिजर, एक प्रकार की कार्य अध्ययन की भूमिका के रूप में भर्ती किया गया। उस समय कॉलेज की शिक्षाएँ अरस्तु पर आधारित थीं। न्यूटन आधुनिक दार्शनिकों जैसे डेसकार्टेस और खगोलविदों जैसे कोपरनिकस गैलीलियो और केपलर के विचारों को पढ़ना चाहते थे। सन् 1665 में उन्होंने सामान्यीकृत द्विपद प्रमेय की खोज की और एक गणितीय सिद्धान्त विकसित करना शुरू किया जो बाद में अत्यल्प कलन के नाम से जाना गया। न्यूटन को सामान्यीकृत प्रमेय की खोज का श्रेय दिया जाता है जो किसी भी घात के लिए मान्य है। न्यूटन ने परिमित अंतरों के सिद्धान्त में महत्वपूर्ण योगदान दिया, वे पहले व्यक्ति थे जिन्होंने भिन्नात्मक सूचकांक का प्रयोग किया। उन्होंने लघुगुणक के द्वारा हरात्मक श्रेणी के आंशिक योग का सन्निकटन किया।

अगस्त 1665 में जैसे ही न्यूटन ने अपनी डिग्री प्राप्त की, उसके ठीक बाद प्लेग की भीषण महामारी से बचने के लिए एहतियात के रूप में विश्वविद्यालय को बंद कर दिया गया। इसके बाद के दो वर्षों तक उन्होंने वूलस्त्रोपे में अपने घर पर निजी अध्ययन किया तथा कलन व गुरुत्वाकर्षण के नियमों का विकास किया।

## मानवता के महान प्रहरी

### सर आइजैक न्यूटन : जीवन व कर्म

#### □ डॉ. रचना माथुर

1667 में वह ट्रिनिटी के एक फैलो के रूप में कैम्ब्रिज लौट आए।

उन्हें सन् 1669 में गणित का ल्सूकेसियन प्रोफेसर चुना गया। सन् 1687 में उनकी पुस्तक “फिलोसोफी नेचुरेलिस प्रिन्सिपिया मेथेमेटिका” प्रकाशित हुई। यह विज्ञान के इतिहास में इतिहास में एक प्रभावशाली पुस्तक है। इस कार्य में न्यूटन ने सार्वत्रिक गुरुत्व और गति के तीन नियमों का वर्णन किया जिसने अगली तीन शताब्दियों के लिए भौतिक ब्रह्माण्ड के वैज्ञानिक दृष्टिकोण पर अपना वर्चस्व स्थापित कर लिया।

वे 1689 से 1690 तक तथा 1701 में इंग्लैण्ड की संसद के सदस्य भी रहे। सन् 1696 में न्यूटन शाही टकसाल के वार्डन का पद सम्भालने के लिए लन्दन चले गये। सन् 1699 में वह शाही टकसाल के मास्टर बने। अप्रैल 1705 में क्वीन ऐनी ने न्यूटन को ट्रिनिटी कॉलेज कैम्ब्रिज में शाही यात्रा के दौरान नाइट की उपाधि दी। उन्होंने 15 अप्रैल सन् 1726 को एक लेखक विलियम स्तुकेले से हुई बातचीत में जिज्ञासा किया कि उनके दिमाग में गुरुत्व का विचार पहले कब आया। जब वह एक सेव के पेड़ के नीचे ध्यान मुद्रा में बैठे थे तब पेड़ से एक सेव के गिरने पर उन्होंने सोचा कि यह सेव हमेशा भूमि के सापेक्ष लम्बवत ही क्यों गिरता है, दाएँ, बाएँ या ऊपर की ओर क्यों नहीं जाता है। तब उनके दिमाग में गुरुत्वाकर्षण का विचार आया।

गणित में अवकलन और समाकलन के विकास का श्रेय गोट फ्राइट लीबनीज के साथ न्यूटन को भी जाता है। अधिकांश आधुनिक इतिहासकारों का मानना है कि न्यूटन और लीबनीज ने कलन का विकास अपने अपने अद्वितीय संकेतनों का उपयोग करते हुए स्वतंत्र रूप से किया।

न्यूटन का स्विस गणितज्ञ निकोलस फतियो डुईलियर के साथ बहुत करीबी रिश्ता

था। डुईलियर ने न्यूटन की पुस्तक “फिलोसोफी नेचुरेलिस प्रिन्सिपिया मेथेमेटिका” के नए संस्करण की योजना बनाई थी लेकिन इसे पूरा नहीं कर पाए।

न्यूटन की मृत्यु लंदन में 31 मार्च 1727 को हुई और उन्हें वेस्टमिस्टर एब्बे में दफनाया गया था। न्यूटन का स्मारक सफेद और धूसर संगमरमर में बना है। इस स्मारक में न्यूटन की मूर्ति पत्थर की बनी हुई कब्र के ऊपर टिकी हुई, उनकी दाहिनी कोहनी उनकी कई महान पुस्तकों पर रखी है और उनका बाँया हाथ एक गणितीय डिजाइन से युक्त एक सूची की ओर इशारा कर रहा है। उसके ऊपर एक पिरामिड है और एक खगोलीय ग्लोब राशि चक्र के संकेतों तथा 1680 के धूमकेतु का रास्ता दिखा रहा है। आधार पर दिए गए लैटिन शिलालेख का अनुवाद है—

यहाँ नाइट आइजैक न्यूटन को दफनाया गया जो दिमागी ताकत से दिव्य थे, उनके अपने गणितीय सिद्धांत हैं, उन्होंने ग्रहों की आकृतियों और पथ का वर्णन किया, धूमकेतु के मार्ग बताए, समुद्र में आने वाले ज्वार का वर्णन किया, प्रकाश की किरणों में असमानताओं को बताया, रंगों के गुणों का वर्णन किया और वह सब कुछ बताया जो किसी अन्य विद्वान ने पहले कल्पना भी नहीं की थी। वे मेहनती, मेधावी और विश्वासयोग्य थे। वे पवित्र ग्रंथों तथा प्रकृति में विश्वास रखते थे। वे अपने दर्शन में अच्छाई और भगवान के पराक्रम में विश्वास रखते थे तथा अपने व्यवहार में सादगी रखते थे। मानव जाति में वे एक महान आभूषण थे। उनकी 20 मार्च सन् 1726 को मृत्यु हो गई। न्यूटन की महानता एवं लोकप्रियता का अंदाज इसी बात से लगाया जा सकता है कि पूर्व प्राथमिक कक्षाओं तक के विद्यार्थी उनके नाम एवं गुरुत्वाकर्षण नियम से परिचित हैं।

—विभागाध्यक्ष, गणित विभाग  
डुंगर महाविद्यालय, बीकानेर (राजस्थान)

ब्रह्मगुप्त (598-668 AD) गणितज्ञ तथा खगोलज्ञ था। उसने गणित तथा खगोल विज्ञान पर कई पुस्तकें लिखी थीं। यह गौरव का विषय है कि ब्रह्मगुप्त का जन्म 598AD में राजस्थान के शहर भीनमाल में हुआ था। प्राचीन समय में भीनमाल शहर का नाम भीलामाल था। ब्रह्मगुप्त ने अपने जीवन का अधिकांश भाग भीलामाल शहर में ही बिताया। अतः ब्रह्मगुप्त को भीलामालाचार्य भी कहते हैं। उसने गणित तथा खगोल विज्ञान की प्रसिद्ध पुस्तक ब्रह्मस्फूतासिद्धान्त (ब्रह्म का सिद्धान्त) 628AD में भीनमाल शहर में रहते हुए लिखी थी। इस पुस्तक में 25 अध्याय हैं जिनमें अभूतपूर्व तथा अद्वितीय गणितीय परिणाम हैं। इतिहासकार अल-बिरूनी (C.1050) ने अपनी पुस्तक “तारीखे अल-हिन्द” में लिखा है कि ब्रह्मगुप्त की इस पुस्तक “ब्रह्मस्फूतासिद्धान्त” को भारत से बगदाद ले जाकर इसका अरबिक अनुवाद किया गया जिसका नाम “सिन्दहिन्द” था। ब्रह्मगुप्त ने और भी पुस्तकें गणित एवं खगोल विज्ञान विषय पर लिखी हैं— उसने “कदमकेला” 624AD में, “खण्डाखाद्याका” 663AD तथा “दुरकेअभ्यानारडा” 672AD में लिखी।

**ब्रह्मगुप्त के कार्य— 1. बीजगणित :** ब्रह्मगुप्त ने अपनी पुस्तक “ब्रह्मस्फूतासिद्धान्त” के 18वें अध्याय में एकघातीय व्यापक समीकरणों को हल करने की विधि का उल्लेख किया है। उसने व्यापक द्विघात समीकरण को भी हल करने की विधि दी तथा दो हल ज्ञात किये—

$$x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a},$$

$$x = \frac{\sqrt{ac + \frac{b^2}{4}} - \frac{b}{2}}{a}$$

उसने युगपत् अनिर्धार्य समीकरणों को भी हल किया। उसने योग संक्रिया के लिए संख्याओं को निकट लिखा। व्यवकलन संक्रिया के लिए बिन्दु, गुणा के लिए संख्याओं के बीच “गुणा”,

## राजस्थान के गौरव

# खगोलविज्ञ तथा गणितज्ञ ब्रह्मगुप्त

□ डॉ. राकेश कुमार परमार

भाग के लिए संख्याओं के नीचे संख्या आदि संकेत प्रयोग में लिये।

**2. अंकगणित :** ब्रह्मगुप्त से पूर्व भी विश्व में कई संस्कृतियों को चार मूलभूत संक्रियाओं (योग, व्यवकलन, गुणन तथा भाग) का ज्ञान था परन्तु हिन्दू-अरबिक पद्धति पर आधारित इन मूलभूत संक्रियाओं का प्रथम बार ब्रह्मगुप्त ने ही अपनी पुस्तक “ब्रह्मस्फूतासिद्धान्त” में उल्लेख किया तथा उपयोग भी किया। इस पुस्तक के अठारहवें अध्याय में ब्रह्मगुप्त ने ऋणात्मक संख्याओं को परिभाषित किया तथा उनकी संक्रियाओं की भी व्याख्या की और उल्लेख किया कि दो ऋणात्मक संख्याओं का योग ऋणात्मक, एक धनात्मक तथा दूसरी ऋणात्मक संख्या का योग उनका अन्तर, दो धनात्मक संख्याओं का योग धनात्मक, दो धनात्मक संख्याओं का गुणनफल धनात्मक, एक धनात्मक तथा एक ऋणात्मक संख्या का गुणनफल ऋणात्मक, एक धनात्मक संख्या को ऋणात्मक संख्या में से घटाने की संक्रिया में योग करना होगा तथा परिणाम ऋणात्मक संख्या होगी, एक धनात्मक संख्या में से ऋणात्मक संख्या घटाने की संक्रिया में योग करना होगा तथा परिणाम धनात्मक होगा आदि।

**3. शून्य (Zero) :** ब्रह्मगुप्त को अंकशून्य का आविष्कारक माना गया है। अपनी पुस्तक “ब्रह्मस्फूतासिद्धान्त” में ब्रह्मगुप्त ने शून्य के साथ धनात्मक तथा ऋणात्मक संख्याओं की संक्रियाओं का वर्णन किया है— संख्या में शून्य जोड़ने पर या घटाने पर संख्या का मान अपरिवर्तित रहता है, परन्तु शून्य में से धनात्मक संख्या घटाने पर संख्या ऋणात्मक एवं ऋणात्मक संख्या घटाने पर संख्या धनात्मक प्राप्त होती है, शून्य से किसी भी संख्या का गुणा करने पर, गुणनफल शून्य होता है, शून्य में शून्य जोड़ने पर, घटाने पर तथा शून्य से शून्य को गुणा करने

पर परिणाम शून्य ही प्राप्त होता है। परन्तु किसी भी संख्या को शून्य से भाग देने की संक्रिया में ब्रह्मगुप्त ने त्रुटि कर दी तथा  $\frac{0}{0} = 0$  का उल्लेख किया जो गलत है।

**4. भिन्नों की संक्रियाएँ :** अपनी पुस्तक “ब्रह्मस्फूतासिद्धान्त” के अध्याय 12 में ब्रह्मगुप्त ने भिन्नों की संक्रियाओं (योग, व्यवकलन, गुणन, भाग) की विस्तार से व्याख्या

की। उदाहरणस्वरूप—  $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ ,

$$a + \frac{b}{d} = \frac{ad+b}{d}, \quad \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd},$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a(d+b)}{cd} \text{ तथा}$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{a(d-b)}{cd},$$

ये सब संक्रियाएँ आधुनिक गणित में प्रयोग में ली जाती हैं।

**5. श्रेढी :** ब्रह्मगुप्त ने प्रथम n पदों के योग के सूत्र दिये—

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{तथा } 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

ये सब परिणाम आधुनिक गणित तथा विज्ञान में बहुत महत्वपूर्ण हैं। इसके अतिरिक्त संख्याओं के वर्ग तथा वर्गमूल, संख्याओं के घन तथा घनमूल ज्ञात करने की विधियाँ भी ब्रह्मगुप्त ने दी।

**6. पायथगोरियन त्रिक संख्याएँ :** अपनी पुस्तक “ब्रह्मस्फूतासिद्धान्त” के अध्याय

12 में ब्रह्मगुप्त ने पायथोगोरियन त्रिक संख्याएँ (3, 4, 5), (7, 24, 25), (5, 12, 13), (6, 8, 10), (9, 12, 15), (10, 24, 26) आदि का उल्लेख किया। इन त्रिक संख्याओं में प्रथम तथा द्वितीय संख्याओं के वर्गों का योग तृतीय संख्या के वर्ग के बराबर है।

उदाहरणस्वरूप—

$$3^2 + 4^2 = 5^2, 7^2 + 24^2 = 25^2, 5^2 + 12^2 = 13^2, \dots, 10^2 + 24^2 = 26^2$$

ब्रह्मगुप्त ने पहाड़ों की ऊँचाई ज्ञात करने के भी सूत्र दिये।

**7. पैल समीकरण (Pell's Equation) :** ब्रह्मगुप्त ने पैल समीकरण  $Nx^2 + 1 = y^2$  के हल युक्लीडियन अल्गोरिथम विधि से ज्ञात किये। उसने हल निकालने में निम्नलिखित सर्वसमिका (Identity) का उपयोग किया :

$$\begin{aligned} (x_1^2 - Ny_1^2)(x_2^2 - Ny_2^2) &= \\ (x_1x_2 + Ny_1y_2)^2 - & \\ N(x_1y_2 + x_2y_1)^2 & \end{aligned}$$

यह सर्वसमिका डायोफंटस की सर्वसमिका का व्यापक रूप है।

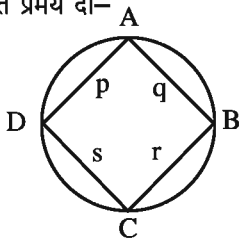
**8. रेखागणित :** ब्रह्मगुप्त का चक्रीय चतुर्भुज (Cyclic Quadrilateral) ज्ञात करने का सूत्र रेखागणित में बहुत प्रसिद्ध है—

चक्रीय चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल =

$$\sqrt{(t-p)(t-q)(t-r)(t-s)}$$

$$\text{जहाँ } t = \frac{1}{2}(p+q+r+s)$$

ब्रह्मगुप्त ने त्रिभुज सम्बन्धी भी अनेक प्रमेयों (Theorems) का कथन तथा प्रमाण दिया। उसने परिमेय त्रिभुज (जिसकी भुजाएँ परिमेय संख्याएँ a, b, c) के सम्बन्ध में निम्नलिखित प्रमेय दी—



$$a = \frac{1}{2} \left( \frac{u^2}{v} + v \right), \quad b = \frac{1}{2} \left( \frac{u^2}{w} + w \right),$$

$$c = \frac{1}{2} \left( \frac{u^2}{v} - v + \frac{u^2}{w} - w \right)$$

जहाँ u, v, w परिमेय संख्याएँ हैं।

ब्रह्मगुप्त की रेखागणित में सबसे महत्वपूर्ण प्रमेय निम्नलिखित है— चक्रीय चतुर्भुज के प्रत्येक विकर्ण (Diagonal) की लम्बाई =  $\sqrt{pr+qs}$  जहाँ p, q, r, s चतुर्भुज की भुजाएँ हैं।

**9.  $\pi$  का मान :** ब्रह्मगुप्त ने  $\pi$  का सन्निकट मान 3 लिया तथा यथार्थ मान  $\sqrt{10}$  लिया जो  $\pi$  के आधुनिक मान 3.14 के काफी निकट है। रेखागणित तथा त्रिकोणमिति में  $\pi$  का मान अति महत्वपूर्ण है।

इसके अतिरिक्त ब्रह्मगुप्त ने आयताकार प्रिज्म, पिरेमिड्स, वर्ग पिरेमिड के छिनक (Frustum) आदि के आयतन ज्ञात करने के सूत्र दिये।

**10. अन्तर्वेशन सूत्र (Interpolation Formula) :** 665AD में ब्रह्मगुप्त ने न्यूटन-स्टर्लिंग के अन्तर्वेशन सूत्र का विशिष्ट स्वरूप दिया—

$$f(a+xh) \approx f(a) +$$

$$x \left( \frac{\Delta f(a) + \Delta f(a-h)}{2} \right)$$

$$+ \frac{x^2}{2} \frac{\Delta^2 f(a-h)}{2!},$$

जहाँ

$$\Delta f(a) = f(a+h) - f(a)$$

**11. खगोल विज्ञान :** अरब के निवासियों को खगोल विज्ञान का ज्ञान ब्रह्मगुप्त की पुस्तक “ब्रह्मस्फूतासिद्धान्त” से प्राप्त हुआ। एडवर्ड सक्सहो (Edward Saxhaw) के अनुसार “वह ब्रह्मगुप्त ही था जिसने अरब के

लोगों को खगोल विज्ञान सिखाया।” ब्रह्मगुप्त ने खगोल विज्ञान की प्रयोगशाला उज्जैन में स्थापित की थी। मोहम्मद अल-फजारी ने ब्रह्मगुप्त की पुस्तक “ब्रह्मस्फूतासिद्धान्त” का अरबी भाषा में अनुवाद किया। ब्रह्मगुप्त ने अपनी इस पुस्तक के अध्याय 7 (अर्द्धचन्द्राकार) में वर्णन किया है कि चन्द्रमा पृथ्वी से सूर्य की अपेक्षा निकट है तथा चन्द्रमा का प्रकाशित भाग सूर्य तथा चन्द्रमा की सापेक्ष स्थिति पर निर्भर करता है। उसकी खगोल विज्ञान की निम्नलिखित देन (Contribution) है— (1) आकाशीय पिण्डों की स्थिति की समय के सापेक्ष गणना। (2) आकाशीय पिण्डों की उदय तथा अस्त की स्थिति की गणना। (3) सूर्यग्रहण तथा चन्द्रग्रहण की गणना। (4) पृथ्वी तथा आकाश को चपटा न मानकर गोलाकार माना। (5) पृथ्वी स्थिर नहीं है तथा वह घूर्णन गति करती है।

इतिहासकार अल-बिरूनी ने ब्रह्मगुप्त के खगोल विज्ञान के सिद्धान्तों की पुष्टि की।

उपर्युक्त वर्णन से स्पष्ट है कि ब्रह्मगुप्त अपने समय का महान गणितज्ञ तथा खगोलविज्ञ था। उसके शून्य तथा ऋणात्मक संख्याओं तथा उनकी संक्रियाओं के आविष्कार ने गणित तथा खगोल विज्ञान के इतिहास में क्रान्ति उत्पन्न की। अत्यधिक गौरवपूर्ण बात यह है कि वह राजस्थान का सपूत था। राजस्थान से उज्जैन नगर जाकर वहाँ खगोल विज्ञान की प्रयोगशाला स्थापित करना ब्रह्मगुप्त की बहुत बड़ी उपलब्धि थी। उसने गणित की सभी शाखाओं— अंकगणित, बीजगणित, रेखागणित, त्रिकोणमिति, अन्तर्वेशनित सिद्धान्त तथा खगोल विज्ञान को नये आयाम दिये। गणित तथा खगोल विज्ञान ब्रह्मगुप्त की ऋणी है। ऐसी महान विभूति को शत-शत नमन जिसने सूर्य ग्रहण तथा चन्द्रग्रहण की अवधारणा विश्व को प्रदान की।

—सहायक आचार्य, गणित विभाग  
राजकीय अभियांत्रिकी एवं प्रौद्योगिकी महाविद्यालय,

बीकानेर-334005



प्राचीन भारत में गणित और ज्योतिष का काफी विकास हो चुका था। ईसा से कई शताब्दी पूर्व शून्य की खोज भारतीय गणितज्ञों ने की थी। आर्यभट्ट, ब्रह्मगुप्त, श्रीधर, महावीर और भास्कर इत्यादि महान गणितशास्त्री हुए हैं।

श्री भास्कराचार्य का जन्म 1114 ईस्वी में हुआ। वह दक्षिण में विहार के निवासी थे और उन्होंने उज्जैन में कार्य किया। श्री भास्कराचार्य ने व्याकरण, आयुर्वेद, दर्शनशास्त्र, गणित, चारों वेद, वेदान्तमीमांसा आदि का विस्तृत अध्ययन किया था। उन्होंने “सिद्धान्त शिरोमणी” नामक ग्रंथ लिखा। जिसका एक भाग “लीलावती” के नाम से प्रसिद्ध हुआ। इसमें मुख्य रूप से अंक गणित या पट्टी गणित ही है पर इसके साथ बीज गणित और रेखा गणित के बारे में भी वर्णन मिलता है।

लीलावती श्री भास्कराचार्य की पुत्री का नाम था। उसका विवाह नहीं हो सका और ज्योतिष के अनुसार सम्भव भी नहीं था। उसके पिता ने कहा कि “मैं तुम्हारे नाम से एक पुस्तक लिखूँगा जिससे तुम्हारा नाम हमेशा चलता रहेगा।” इस पुस्तक ‘लीलावती’ पर गंगाधर, सूर्यदास संगनाथ, रामकिशन देव आदि ने टिप्पणियाँ लिखी हैं। इसी ग्रन्थ का अकबर बादशाह के निर्देश पर “फैजी” ने 1587 में फारसी में अनुवाद किया। श्री कौलब्रुक (Colebrooke) ने इसका अंग्रेजी में अनुवाद किया। पर आज का भारत का विद्यार्थी इसके (तथा अन्य प्राचीन ग्रंथों) के बारे में सर्वथा अनभिज्ञ है।

“लीलावती” पथ और दोहों के रूप में संस्कृत में लिखी गई है। सबसे पहले श्री गणेश भगवान को नमस्कार करते हुए शुरू की गई है। पहले एक नियम बताया गया है और फिर उस पर आधारित प्रश्न किये गये हैं। गणित के प्रश्नों को दैनिक जीवन की बातों से सम्बन्धित करके प्रश्न बनाए हुए हैं। सभी जगह लीलावती को सम्बोधित करते हुए प्रश्न पूछा गया है— हे लीलावती तू गणित में प्रवीण है तो बता, हे गणितज्ञ, हे महिला बता इस प्रकार प्रश्न किये गए हैं।

इस पुस्तक में वर्गमूल, घनमूल, ब्याज, क्रय-विक्रय, मिश्रण, समान्तर श्रेणियाँ, गुणोत्तर श्रेणियाँ, क्रमचय, संचय, त्रिभुज, चतुर्भुज, वृत्त,

## गणित का अद्भुत ग्रंथ

### लीलावती

□ स्व. धनपाल सिंह माथुर

शंकु, पिरामिड और ज्योतिष आदि के नियम और प्रश्नोत्तर हैं। उस जमाने में मुद्रा के रूप में कोड़िया, काकणी, दाम, निशका आदि; तैल, के लिए रत्ती, मासा, जो, धारण आदि तथा नाप के लिए जौ, अंगुल, हाथ, योजन, कोस आदि का प्रचलन था। इन्हीं पर आधारित प्रश्न हैं।

(I) नमूने के रूप में कुछ बातें निम्नलिखित हैं जो पाठकों के लिए रुचिकर होगी—

किसी संख्या के वर्ग करने के तीन तरीके दिये गये हैं।

प्रथम अंक का वर्ग करके रख दीजिए फिर एक स्थान छोड़कर उसके नीचे प्रथम अंक का दुगुना करके बाकी के अंकों से गुणा कर दीजिए फिर दूसरे अंक का वर्ग कीजिए और एक स्थान छोड़कर रख दीजिए। फिर दूसरे अंक का दुगुना करके बाकी बचे अंक से गुणा कर दीजिए। इसी क्रिया को दोहराते रहिये और अंतिम अंक का वर्ग करके रख दीजिए और फिर जोड़ लीजिए।

$$\begin{array}{rcl} (397)^2 & = & (7)^2 = 49 \\ & & 7 \times 2 \times 39 = 546 \times \\ & & (9)^2 = 81 \times \times \\ & & 9 \times 2 \times 3 = 54 \times \times \times \\ & & (3)^2 = 9 \times \times \times \times \\ \text{योग :} & & \underline{157609} \end{array}$$

(II) संख्या के दो भाग कर दीजिए और दोनों भागों को गुणा करके दोगुना कर दीजिये। और उसे दोनों भागों के वर्ग में जोड़ दीजिए।

$$\begin{array}{rcl} (95)^2 & = & (90+5)^2 = 90 \times 5 \times 2 = 900 \\ & & (90)^2 = 8100 \\ & & (5)^2 = 25 \\ & & \underline{= 9025} \end{array}$$

(III) किसी कल्पित संख्या को दी हुई संख्या में एक बार जोड़ दें और एक बार घटा

दें और उनकी गुणा कर लें तथा फिर उसमें कल्पित संख्या का वर्ग जोड़ दें।

$$\begin{array}{rcl} (\text{कल्पित संख्या} - 4) \\ (96)^2 & = & 96+4 = 100 \\ & & 96-4 = 92 \end{array}$$

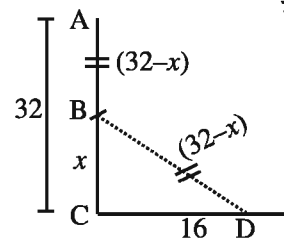
$$\begin{array}{rcl} \text{दोनों संख्याओं की गुणा } 92 \times 100 & = & 9200 \\ \text{कल्पित संख्या का वर्ग } (4)^2 & = & 16 \\ (96)^2 & = & \underline{9216} \end{array}$$

ऐसी ही कल्पित संख्या जोड़ी जाय जिससे प्रश्न आसान हो जाए जैसे 397 में कल्पित संख्या 3 लेंगे।

रेखा गणित के उदाहरण : (I) एक 32 गज ऊँचा बाँस बीच में से टूटता है और मुड़कर उसका ऊपरी हिस्सा (सिरा) जड़ से 16 गज दूरी पर जमीन पर टिक जाता है तो बताओ बाँस किस ऊँचाई पर टूटा।

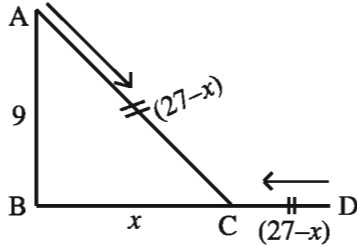
हल : माना बाँस बिन्दु B से टूटता है जिसका टूटा हुआ भाग AB=(32-x) जमीन पर बिन्दु D पर टिकता है। ∴ AB = BD = (32-x) अब, चित्रानुसार, समकोण Δ BCD में, (32-x)<sup>2</sup> = (16)<sup>2</sup> + x<sup>2</sup> = x = 12 गज

उत्तर = 12



(II) एक 9 गज ऊँचे खम्भे पर मोर बैठा हुआ है। एक साँप जिसका बिल खम्भे के नीचे है। खम्भे की ऊँचाई से तीन गुनी दूरी पर बैठा है। मोर साँप पर झपटता है और साँप बिल की ओर लपकता है। दोनों की गति समान है तो बताओ साँप को वह खम्भे से कितनी दूरी पर पकड़ेगा।

हल : माना मोर साँप को  $t$  समय बाद बिन्दु C पर पकड़ता है चूँकि दोनों का वेग समान है अतः मोर द्वारा तय की गई दूरी  $AC =$  साँप द्वारा तय की गई दूरी  $DC = (27-x)$ , चित्रानुसार, समकोण  $\triangle ABC$  में  $(27-x)^2 = (9)^2 + (x)^2 \Rightarrow x = 12$  गज



**बीज गणित : (I)** चार जौहरी हैं एक के पास 8 नील मणियाँ हैं दूसरे के पास 10 माणक हैं व तीसरे के पास 100 मोती हैं और चौथे के पास 5 हीरे हैं। प्रत्येक जौहरी ने दूसरे को अपनी अपनी चीज में से एक-एक उपहार के रूप में दी। इसके बाद में चारों के पास बराबर कीमत का माल बचा तो चारों वस्तुओं की कीमत बताइये।

हल : उपहार और व्यक्तियों की गुणा कर दीजिए।

4 व्यक्ति और एक उपहार  $4 \times 1 = 4$

इस रकम को चारों संख्याओं में से घटा दीजिए। बची हुई संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य (L.C.M.) निकाल लीजिए। लघुतम समापवर्त्य को बची हुई संख्याओं का भाग लगा दीजिए। वही उनका मूल्य होगा। इस प्रकार—

नीलमणियाँ	$8 - 4 = 4$	} $\Rightarrow \text{LCM} = 96$
माणक	$10 - 4 = 6$	
मोती	$100 - 4 = 96$	
हीरे	$5 - 4 = 1$	

अतः नीलमणी की कीमत =  $96/4 = 24$ , माणक की कीमत =  $96/6 = 16$ , मोती की कीमत =  $96/96 = 1$ , हीरे की कीमत =  $96/1 = 96$

—पूर्व प्राचार्य

महारानी सुदर्शना महाविद्यालय, बीकानेर

(ब्रह्मलीन शिक्षाविद् धनपाल सिंह जी का यह आलेख उपलब्ध करवाने के लिए हम उनकी गणितज्ञ पुत्री डॉ. रचना माथुर के प्रति आभारी हैं। रचना जी राजकीय डूंगर महाविद्यालय, बीकानेर में गणित विभाग की मुखिया हैं।)

## खगोलज्ञ, गणितज्ञ तथा ज्योतिषाचार्य वराहमिहिर

□ डॉ. मुकेश एम. जोशी

**वराहमिहिर** (505-587 CE) भारतीय खगोलज्ञ, गणितज्ञ तथा ज्योतिषाचार्य उज्जैन का निवासी था। वह चन्द्रगुप्त II विक्रमादित्य के नवरत्नों में से एक था। उसकी पुस्तकें— (1) पंच सिद्धान्तिका (2) बृहत् संहिता तथा (3) ज्योतिष शास्त्र, बहुत प्रसिद्ध हैं। उसने त्रिकोणमिति पर भी काफी कार्य किया। वराहमिहिर वह प्रथम खगोलज्ञ था जिसने बताया कि इक्विनॉक्स (Equinox) का स्थानान्तरण 50.32 सेकण्ड्स में होता है।

**पंच-सिद्धान्तिका** : इस पुस्तक में वराहमिहिर ने खगोल विज्ञान की प्राचीन भारतीय महत्वपूर्ण सूचनाएँ प्रदान की जो कालग्रस्त अर्थात् खो गई थी। यह पुस्तक गणितीय खगोल विज्ञान का एक शोध-प्रबन्ध है तथा इस पुस्तक में पाँच प्राचीन खगोलीय विज्ञान के शोध-प्रबन्ध भी समाहित हैं— (1) सूर्य सिद्धान्त (2) रोमाका सिद्धान्त (3) पौलिसिया सिद्धान्त (4) वशिष्ट सिद्धान्त तथा (5) पैटामाहा सिद्धान्त। इस पुस्तक में वेदांग ज्योतिष तथा हेलिनिस्टिक (Hellenistic) एवं खगोलीय विज्ञान का विस्तृत विवरण है तथा यूनान, मिश्र और रोम के खगोलीय विज्ञान का भी उल्लेख है।

**बृहत् संहिता** : वराहमिहिर की दूसरी पुस्तक बृहत् संहिता ज्ञान का विश्वकोष (Encyclopedia) है। इसमें मानवीय रुचि के अनेक विषयों का विस्तार से वर्णन है— (1) ग्रहों की गति, (2) ग्रहण, (3) वर्षा, (4) बादल, (5) फसल का उत्पादन, (6) सुगन्ध का बनाना आदि। इस पुस्तक में बहुमूल्य पत्थरों हीरा, मोती आदि का भी वर्णन है तथा पवित्र जो मौजियो का विशेष वर्णन है। इस पुस्तक में 106 अध्याय हैं अतः इस पुस्तक को “महान् संकलन” के रूप में जाना जाता है।

**ज्योतिष शास्त्र** : वराहमिहिर महान् ज्योतिषाचार्य था। उसने ज्योतिष की तीनों

शाखाओं का विस्तार से वर्णन किया है। उसने ज्योतिष की निम्नलिखित पुस्तकें लिखी—

- (1) बृहत् जातक (हिन्दू ज्योतिष शास्त्र तथा हस्तरेखा विज्ञान का महान् शोध प्रबन्ध)।
- (2) दैव्य वल्लभ।
- (3) योग यात्रा।
- (4) लघु जातक।
- (5) विवाह पटल।

वराहमिहिर के पुत्र प्रिथुयास ने भी हिन्दू ज्योतिष शास्त्र पर काफी शोध किया। हस्तरेखा विज्ञान पर प्रिथुयास की प्रसिद्ध पुस्तक “होरा सार” है।

**त्रिकोणमिति** : त्रिकोणमिति के प्रसिद्ध सूत्र जो आधुनिक त्रिकोणमिति के आधार हैं, का ज्ञान भी वराहमिहिर को था। उदाहरण स्वरूप—

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin x = \cos (\pi/2 - x)$$

$$(1 - \cos 2x)/2 = \sin^2 x$$

वराहमिहिर ने केवल अपने प्रेक्षणों (Observation) का उल्लेख किया अपितु उसने उनका आकर्षक एवं काव्यात्मक रूप में वर्णन किया। उसकी “बृहत् जातक” तथा “बृहत् संहिता” पुस्तकों में हिन्दी छंदों में खगोल विज्ञान तथा ज्योतिष विज्ञान का वर्णन है।

वराहमिहिर को ग्रीक, मिश्र, रोम तथा अन्य पाश्चात्य देशों के खगोल विज्ञान का भी पूर्ण ज्ञान था।

उपर्युक्त विवरण से स्पष्ट है कि वराहमिहिर प्रसिद्ध भारतीय गणितज्ञ, खगोलविज्ञ तथा ज्योतिषाचार्य था। हम वराहमिहिर से गौरवान्वित हैं जिसने विश्व को खगोल विज्ञान का ज्ञान प्रदान किया।

—एसोसिएट प्रोफेसर, गणित विभाग  
राज. अभियांत्रिकी एवं प्रौद्योगिकी महाविद्यालय,  
बीकानेर

पहली शताब्दी के आसपास अध्ययन का क्षेत्र जो गणित के इतिहास के रूप में जाना जाता है, प्रारम्भिक रूप से गणित में आविष्कारों की उत्पत्ति में एक जाँच है, और कुछ हद तक, अतीत के अंकन और गणितीय विधियों की एक जाँच है। आधुनिक युग और ज्ञान के विश्व स्तरीय प्रसार से पहले, कुछ ही स्थलों में नए गणितीय विकास के लिखित उदाहरण प्रकाश में आये हैं। सबसे प्राचीन उपलब्ध गणितीय ग्रन्थ हैं, प्लिमपटन 322 (Plimpton 322) (बेबीलोन का गणित) (Babylonian mathematics) सी. 1900 ई. पू. मास्को गणितीय पेपाइरस (Moscow Mathematical Papyrus) (इजिप्ट का गणित) (Egyptian mathematics) सी. 1850 ई.पू. रहिंद गणितीय पेपाइरस (Rhind Mathematical Papyrus) ({3}इजिप्ट का गणित {3}सी. 1650 ई.पू.) और शुल्बा के सूत्र (Shulba Sutras) (भारतीय गणित सी. 800 ई.पू.) ये सभी ग्रन्थ तथाकथित पाईथागोरस की प्रमेय (Pythagorean theorem) से सम्बन्धित हैं, जो मूल अंकगणितीय और ज्यामिति के बाद गणितीय विकास में सबसे प्राचीन और व्यापक प्रतीत होती है।

बाद में ग्रीक और हेल्लेनिस्टिक गणित (Greek and Hellenistic mathematics) में इजिप्ट और बेबीलोन के गणित का विकास हुआ, जिसने विधियों को परिष्कृत किया (विशेष रूप से प्रमाणों (mathematical rigor) में गणितीय निरुता (Proofs) का परिचय) और गणित को विषय के रूप में विस्तृत किया। इसी क्रम में, इस्लामी गणित (Islamic Mathematics) ने गणित का विकास और विस्तार किया जो इन प्राचीन सभ्यताओं में ज्ञात थी। फिर गणित पर कई ग्रीक और अरबी ग्रंथों का लैटिन में अनुवाद (Translated into Latin) किया गया, जिसके परिणाम स्वरूप मध्यकालीन यूरोप (Medieval Europe) में गणित का आगे विकास हुआ।

प्राचीन काल से मध्य युग (Middle Ages) के दौरान, गणितीय रचनात्मकता के अचानक उत्पन्न होने के कारण सदियों में ठहराव आ गया। 16वीं शताब्दी में, इटली में पुनर्जागरण की शुरुआत में, नए गणितीय विकास हुए। जिससे

## गणित का इतिहास

□ डॉ. नरेन्द्र सिंह सोलंकी

नए वैज्ञानिक खोजों के साथ अंतर क्रियाएँ हुईं।

**प्रारम्भिक गणित**—सबसे पुराने लिखित रिकार्डों से भी बहुत अधिक पहले, ऐसे चित्र मिलते हैं जो मूल गणित के कुछ ज्ञान की ओर इंगित करते हैं, और तारों के आधार पर समय के मापन को भी इंगित करते हैं, उदाहरण के लिए जीवाश्म विज्ञानियों (paleontologists) ने दक्षिणी अफ्रीका की गुफाओं में ओकरे (ochre) चट्टानों की खोज की जो लगभग 70,000 वर्ष पुरानी थी और खरोंच युक्त ज्यामितिक पैटर्न से सुसज्जित थीं, साथ ही प्रागैतिहासिक (prehistoric) विरूपण (artifact) ने अफ्रीका और फ्रांस में ऐसी खोजों की जो 35,000 और 20,000 साल पुरानी हैं, इस बात के प्रमाण मिलते हैं कि महिलाएँ अपने मासिक धर्म चक्र (menstrual cycle) का हिसाब रखने के लिए गिनती करती थीं : इसके लिए हड्डी या पत्थर पर 28-30 खरोंच बना दी जाती थीं, जिस पर एक विशिष्ट मार्कर से निशान बनाये जाते थे। इसके अलावा, शिकारी और चरवाहे जब पशुओं के झुंड पर विचार करते थे तो एक, दो और अनेक की अवधारणाओं को प्रयोग करते थे, साथ ही कोई नहीं या शून्य के विचार से भी अवगत थे।

पाँचवीं सहस्राब्दी ईसा पूर्व के पूर्व राजवंश के इजिप्ट (Predynastic Egypt) के लोगों ने ज्यामितिकस्थानिक (spatial) डिजाइन का चित्रों द्वारा प्रदर्शन किया। ऐसा दावा किया गया है कि तीसरी सहस्राब्दी ई.पू. में मॅगालिथ (megolith) और स्कॉटलैंड में, मेगालिथिक स्मारकों ने अपने डिजाइनों में वृत्त (circle), दीर्घ वृत्त और पाईथागोरियन त्रिक (Pythagorean triple) के ज्यामितीय आकारों को शामिल किया।

प्राचीन भारत की सबसे प्राचीन ज्ञात गणित, जो 3000-2600 ई.पू. में मानी जाती है, उत्तर भारत (North India) और पाकिस्तान सिंधु घाटी सभ्यता (हड़प्पा सभ्यता) में पाई गई है। इस सभ्यता ने समान वजन और मापन की

प्रणाली का विकास किया जिसमें दशमलव (decimal) प्रणाली का प्रयोग किया गया, एक आश्चर्यजनक रूप से उन्नत ईंट (brick) तकनीक जिसमें अनुपात (ratio) का प्रयोग किया गया, पूर्ण समकोण (right angle) पर गलियाँ बनाई गईं, साथ ही कई ज्यामितीय आकारों और डिजाइनों का प्रयोग किया गया, जिसमें घनाभ (cuboid), बैरल (barrel), शंकु (cones), बेलन (cylinders) शामिल हैं तथा इसमें समकेंद्री और एक दूसरे को काटने वाले वृत्त (circle) व त्रिभुजों (triangle) के चित्र भी मिलते हैं। गणितीय उपकरणों में शामिल था एक सटीक दशमलव पैमाना, जो छोटे और सटीक उपविभाजनों से युक्त था, एक खोल उपकरण जो समतल सतह पर या क्षितिज में 40-360 डिग्री के गुणज में कोण का मापन करने के लिए एक कम्पास का काम करता था, एक खोल उपकरण का उपयोग आकाश और क्षितिज के 8-12 पूर्ण विभागों को मापने के लिए किया जाता था।

**पूर्व के पास प्राचीन (सी. 1800-500 ई.पू.)**

**मेसोपोटामिया :** बेबीलोन का गणित मेसोपोटामिया (आधुनिक इराक) के लोगों के किसी भी गणित से सम्बन्ध रखता है, यह प्रारम्भिक सुमेरियन से लेकर हेल्लेनिस्टिक अवधि (Hellenistic period) की शुरुआत से सम्बन्धित है। इसे बेबीलोन के गणित का नाम दिया गया क्योंकि अध्ययन के स्थान के रूप में बेबीलोन ने केन्द्रीय भूमिका निभाई, जिसका अस्तित्व हेल्लेनिस्टिक अवधि में मन जाता है। इस बिन्दु से, बेबीलोन का गणित ग्रीक और मिस्र के गणित के साथ विलय हो गया और इसने हेल्लेनिस्टिक गणित (Hellenistic mathematics) को जन्म दिया बाद में अरब साम्राज्य (Arab Empire), मेसोपोटामिया, विशेषकर बगदाद के अंतर्गत, एक बार फिर से इस्लामी गणित (Islamic mathematics) के लिए अध्ययन का एक महत्वपूर्ण केन्द्र बन गया।

मिश्र के गणित (Egyptian mathematics) में स्रोतों की अतिरिक्तता के विपरीत बेबीलोन की गणित के बारे में हमारा ज्ञान 1850 के बाद से खुदाई में मिली 400 से अधिक मिट्टी की गोलियों से व्युत्पन्न हुआ है। क्युनीरूप लिपि (Cuneiform script) में गोलियों पर किया गया अंकन तब किया गया जब मिट्टी गीली थी, और इसे सख्त बनाने के लिए एक भट्टी में या सूरज की गरमी में पकाया गया। इनमें से कुछ गृह कार्य की श्रेणी में वर्गीकृत होते हुए प्रतीत होते हैं।

लिखित गणित का सबसे पुराना प्रमाण प्राचीन सुमेरियन से मिलता है, जिन्होंने मेसोपोटामिया में सबसे पुरानी सभ्यता का निर्माण किया। उन्होंने 2500 ई.पू. के बाद से 3000 ई.पू. से मापन विज्ञान (metrology) की एक जटिल प्रणाली का विकास किया, सुमेरियन लोगों ने मिट्टी की गोलियों पर गुणा के पहाड़े लिखे, और ज्यामितीय अभ्यासों तथा भाग (division) की समस्याओं को हल किया। बेबीलोन के अंकों के सबसे पुराने चिह्न भी इसी अवधि से मिलते हैं।

मिट्टी की गोलियाँ मुख्य रूप से 1800 से 1600 ई.पू. के बीच मिली हैं, ये ऐसे विषयों को कवर करती हैं जिनमें भिन्न, बीज गणित, द्विघात और घन समीकरण शामिल हैं, साथ ही नियमित (regular) व्युत्क्रम (reciprocal) जोड़ों (pairs) पर गणनाएँ भी मिलती हैं। (देखें प्लिमपटन 322)। इन गोलियों पर गुणा के पहाड़े और रेखीय और द्विघात समीकरणों को हल करने की विधियाँ भी शामिल हैं। बेबीलोन की गोली वे बी सी 7289,  $\sqrt{2}$  का मान दशमलव के पाँच स्थानों तक बिल्कुल ठीक बताती हैं।

**प्राचीन भारतीय गणित (सी. 900 ई.पू. - ई. 200)**

**मुख्य लेख : भारतीय गणित**

1	2	3	4	5	6	7	8	9
—	=	≡	+	h	4	7	5	7

**ब्राह्मी अंक (Brahmi numeral)** पहली सदी में सीईई

वैदिक गणित की शुरुआत शतपथ ब्राह्मण के साथ प्रारम्भिक लौह युग में हुई, (सी. 9वीं शताब्दी ई.पू.), जो  $\pi$  ( $\pi$ ) के मान को दशमलव के दो स्थानों तक बताती है। और

शुल्बा के सूत्र (Sulba Sutras)। (सी. 800-500 ई.पू.) ज्यामिति के पाठ हैं जो उन अनुपातिक संख्याओं (Irrational number), अभाज्य संख्याओं (prime number), तीन के नियम (rule of three) और घनमूल (cube root) का उपयोग करते थे; इन्होंने 2 के वर्गमूल (square root) की गणना दशमलव के पाँच स्थानों तक की; वृत्त का वर्ग (squaring in the circle) करने की विधि दी; रैखिक समीकरणों और द्विघात समीकरणों को हल किया; बीज गणितीय रूप से पाइथगोरियन त्रिक (Pythagorean triple) का विकास किया और पाइथगोरस की प्रमेय (proof) का एक आंकिक प्रमाण (Pythagorean theorem) तथा तथ्य दिया।

**शास्त्रीय भारतीय गणित (400-1600)**

**आर्यभट्ट :** सूर्य सिद्धांत (सी. 400) ने ज्या (trigonometric functions), कोज्या (sine) और व्युत्क्रम ज्या के त्रिकोणमितीय फलन (cosine) दिए, और प्रदीप्त वस्तुओं की वास्तविक गति को निर्धारित करने के लिए नियम दिए, जो आकाश में उनकी वास्तविक स्थिति को सुनिश्चित करते हैं। ब्रह्माण्ड विज्ञान सम्बन्धी समय चक्र की व्याख्या इस पाठ्य में की गई, जो एक प्रारम्भिक कार्य से नकल की गई थी, यह 365.25636305 दिनों के एक औसत नक्षत्र वर्ष (sidereal year) से मेल खाती है, जो 365.2563627 दिनों के आधुनिक मान से केवल 1.4 सेकण्ड बढ़ा है। इस कार्य को मध्य युग में अरबी और लैटिन में अनुवादित किया गया।

वर्ष 499 में आर्यभट्ट ने, वरसाइन (versine) फलन की शुरुआत की, ज्या की पहली त्रिकोणमितीय सारणी बनाई, तकनीकों, बीजगणित के लघुगणक, अत्याणु (infinitesimal), अवकलज समीकरण (differential equation) का विकास किया, और एक ऐसी विधि से रैखिक समीकरणों के पूर्ण संख्या हल प्राप्त किया, जो आधुनिक विधि के तुल्य थी, साथ ही गुरुत्वाकर्षण की अभिकेन्द्रिक (heliocentric) प्रणाली पर आधारित खगोलीय (gravitation) गणनाएँ की, उनकी आर्यभट्टिया का अरबी अनुवाद 8वीं शताब्दी से उपलब्ध था, इसके बाद 13वीं शताब्दी में इसका लेती

अनुवाद किया गया। उन्होंने के मान की गणना भी दशमलव के चौथे स्थान तक 3.1416 के रूप में की। 14वीं शताब्दी में, संगमग्राम के माधव (Madhava of Sangamagrama) ने  $\pi$  के मान की गणना दशमलव के ग्यारहवें स्थान तक 3.14159265359 के रूप में की।

सातवीं सदी में ब्रह्मगुप्त ने ब्रह्मगुप्त की प्रमेय (Brahmagupta theorem), ब्रह्मगुप्त का मूल समीकरण (Brahmagupta's identity), और ब्रह्मगुप्त का सूत्र (Brahmagupta's formula) दिया और पहली बार ब्रह्म-स्फूर्त-सिद्धांत में, उन्होंने शून्य के उपयोग को एक स्थानीय धारक (placeholder) के रूप में और एक दशमलव अंक (decimal digit) के रूप में विस्तार से समझाया, तथा हिन्दु-अरबी अंक प्रणाली (Hindu-Arabic numeral system) को स्पष्ट किया। गणित पर इस भारतीय पाठ्य के अनुवाद से (सी. 770) इस्लामी गणितज्ञों ने इस अंक प्रणाली को शुरू किया और इसे अरबी अंकों (Arabic numerals) के रूप में अनुकूलित किया। इस्लामी विद्वान अंक प्रणाली के इस ज्ञान को 12वीं शताब्दी तक यूरोप में ले गए, और अब इसने पूरी दुनिया में सभी पुरानी अंक प्रणालियों को प्रतिस्थापित कर दिया है। 10वीं शताब्दी में, पिंगला (Halayudha) के कार्य पर हल्युद्ध की कमेंट्री में फिबोनाकी अनुक्रम और पास्कल के त्रिभुज (Pascal's triangle) का एक अध्ययन शामिल है, और यह एक मैट्रिक्स (matrix) के निर्माण का वर्णन करता है।

12वीं शताब्दी में, भास्कर (Bhaskara) ने सबसे पहले अवकल कलन (differential calculus) की अवधारणा दी और साथ ही व्युत्पन्न (derivative), अवकलज (differential) गुणांक और अवकलन (differentiation) की अवधारणाएँ भी दीं। उन्होंने रोले की प्रमेय (Rolle's theorem) दी (माध्य मान प्रमेय (mean value theorem) का एक विशेष मामला), पेल के समीकरण (Pell's equation) का अध्ययन किया, और ज्या फलनों के व्युत्पन्न की खोज की। 14वीं शताब्दी से, माधव और केरल स्कूल के (Kerala School) गणितज्ञों ने उनके विचारों को आगे विकसित किया। उन्होंने



गणितीय विश्लेषण (Mathematical analysis) और उतप्लावी बिंदु (floating point) संख्याओं की अवधारणा का विकास किया, और कलन के पूर्ण विकास के लिए मूल अवधारणाएँ दीं, इसमें शामिल हैं पदानुसारसमाकलन (integration), एक वक्र के अंतर्गत एक क्षेत्रफल और इसके प्रतिव्युत्पन्नो या समाकलों का सम्बन्ध, अभिकेन्द्रण के लिए समाकल परीक्षण (integral test for convergence), अरैखिक समीकरणों (iterative method) के हल के लिए पुनरावृत्ति विधि (non-linear), और अपरिमिति शृंखला, घात शृंखला (power series), टेलर शृंखला (Taylor series) और त्रिकोणमितीय शृंखला की संख्या। 16 वीं शताब्दी में, ज्येष्ठदेव (Jyeshtadeva) ने केरल स्कूल की गतिविधियों और प्रमेयों को युक्तिभाषा में समेकित किया, जो दुनिया की पहली अवकल कलन पाठ्य है, इसने समाकल कलन (integral calculus) की अवधारणा को भी शुरू किया।

राजनीतिक उथलपुथल की वजह से भारत में गणित की प्रगति 16वीं शताब्दी के बाद एक तरह से रुक ही गयी।

**मध्यकालीन यूरोपीय गणित (सी. 500-1400) :** गणित में मध्यकालीन यूरोपीय रुचि जिन मुद्दों से उत्पन्न हुई वह वर्तमान गणित से बिल्कुल अलग थे। एक उत्तरदायी तत्व वह विश्वास था कि गणित ने प्रकृति के सृजन के आदेश को समझने के लिए कुंजी प्रदान की है, इसे प्लेटो की तिमास (Timaeus) के द्वारा समर्थन दिया गया और बाइबिल का पथ कि भगवान ने “सभी चीजों को मापन, संख्या और भार में आदेश दिया है” (विजडम 11 : 21)।

**प्रारम्भिक मध्य युग (500-1100) :** बोएथियास (Boethius) ने पाठ्यक्रम में गणित के लिए एक जगह उपलब्ध कराई जब उसने अंकगणित, ज्यामिति, खगोल विज्ञान और संगीत के अध्ययन का वर्णन करने के लिए क्वाड्रीवियम (quadrivium) शब्द दिया। उन्होंने दी इंस्टीट्यूश ने एरिथमेटिका लिखी जो निकोमेकास (Nicomachus) के अंकगणित के परिचय का ग्रीक से एक मुक्त अनुवाद था; दी इंस्टीट्यूश ने म्यूजिका भी ग्रीक स्रोतों से

व्युत्पन्न हुई; और युक्लिड (Euclid) के “तत्वों” (Elements) संश की एक शृंखला। उनका कार्य प्रायोगिक से ज्यादा सैद्धांतिक था, और ग्रीक और अरबी गणितीय कार्य में सुधार तक गणितीय अध्ययन का आधार बना रहा।

**यूरोप में गणित का पुनर्जन्म (1100-1400) :** 12वीं सदी में, यूरोपीय विद्वानों ने वैज्ञानिक अरबी पाठ्य के अध्ययन के लिए (seeking scientific Arabic texts) स्पेन और सिसली की यात्रा की, इसमें अल ख्वारिज्मी की समापन और संतुलन के द्वारा गणना पर संक्षिप्त पुस्तक (The Compendious Book on Calculation by Completion and Balancing) शामिल है, जो चेस्टर के रॉबर्ट (Robert of Chester) के द्वारा लेटिन में अनुवादित की गई, और युक्लीड के “तत्वों” का पूर्ण पाठ्य, जो एडेलार्ड ऑफ बाथ (Adelard of Bath), हर्मन ऑफ केरिन्थिया (Herman of Carinthia) और जेराड ऑफ क्रेमोना (Gerard of Cremona) के द्वारा भिन्न संस्करणों में अनुवादित किया गया।

इन नए स्रोतों ने गणित को नवीनीकृत किया। फिबोनाकी, 1202 में लिबर एबेकी (Liber Abaci) में लिखी गई और 1254 में इसका अद्यतन किया गया, इसने इरेटोस्थेनेस के समय से यूरोप में महत्वपूर्ण गणित का उत्पादन किया, यह एक हजार साल से अधिक अंतर था। इस कार्य से यूरोप में हिंदु-अरबी अंकों (Hindu-Arabic numerals) की शुरुआत हुई, और इसने कई अन्य गणितीय समस्याओं की चर्चा की। चौदहवीं शताब्दी में नई गणितीय अवधारणाओं का विकास हुआ जिसने समस्याओं की एक विस्तृत शृंखला की खोज की। एक महत्वपूर्ण योगदान था।

**प्रारम्भिक आधुनिक यूरोपीय गणित (सी. 1400-1600) :** यूरोप में पुनर्जागरण की शुरुआत में, गणित कुछ बोझिल संकेतनों के द्वारा सीमित थी, जिसमें रोमन अंकों (Roman numeral) का उपयोग किया जाता था और इसमें प्रतीकों के बजाय शब्दों के उपयोग के द्वारा सम्बन्ध की अभिव्यक्ति की जाती थी : इसमें एक अज्ञात के रूप में किसी भी प्लस के निशान का, किसी भी बराबर के निशान का,

या किसी भी गुणा के निशान का उपयोग नहीं किया था। (तथ्य वांछित)

जहाँ तक आज जाना जाता है, 16वीं शताब्दी में यूरोपीय गणितज्ञों ने दुनिया में कहीं भी अग्रिम हुए बिना प्रगति की। इनमें से सबसे पहला था, घन समीकरणों (cubic equation) का सामान्य हल, जिसका सामान्य रूप से श्रेय स्किपियोन डेल फेरो (Scipione del Ferro) सी. को जाता है, 1510, लेकिन इसका पहला प्रकाशन गेरोलामो करडानो (Gerolamo Cardano) के आर्स मेगना में नुरेमबर्ग में जोहानिस पेट्रियस के द्वारा किया गया, जिसमें कोर्दानो के विद्यार्थी लोडोविको फेरारी (Lodovico Ferrari) के द्वारा किया गया द्विघात समीकरण (quartic equation) का सामान्य हल भी शामिल था।

इस बिन्दु से गणितीय विकास में तेजी आई, जिससे भौतिक विज्ञान (physical sciences) की समकालीन उन्नति को योगदान मिला और लाभ मिला। इस प्रगति में मुद्रण (printing) में हुई उन्नति से बहुत अधिक योगदान मिला। सबसे प्राचीन गणित की प्रकाशित पुस्तकें (mathematical books) थीं, प्युरबाच (Peurbach) की थ्योरिका नोवा प्लेने टेरेम (Theoricae nova planetarum) (1472), जिसके बाद वाणिज्यिक अंकगणित पर पुस्तक आई ट्रेविसो अंकगणित (Treviso Arithmetic) (1478), और उसके बाद गणित पर पहली वर्तमान पुस्तक युक्लिड के तत्व 1482 में रेटडोल्ट (Ratdolt) के द्वारा मुद्रित और प्रकाशित की गई।

**17 वीं सदी :** 17 वीं शताब्दी में, पूरे यूरोप में गणितीय और वैज्ञानिक विचारों का एक अभूतपूर्व विस्फोट हुआ। एक इतालवी गैलिलियो, ने बृहस्पति के चन्द्रमाओं को उनके कक्ष में प्रेक्षित किया, इसके लिए उन्होंने होलेण्ड से मँगाये गये खिलौने पर आधारित दूरबीन का उपयोग किया। एक डेन टीचो ब्राहे, ने गणित के आँकड़ों की काफी जानकारी एकत्रित की, जो आकाश में ग्रहों की स्थिति का वर्णन करते हैं। उनके एक जर्मन विद्यार्थी, जोहानीस केपलर ने इन आँकड़ों के साथ काम करना शुरू कर दिया। एक अंश में क्योंकि वे गणनाओं में केपलर

की सहायता करना चाहते थे, जॉन नेपियर (John Napier) ने स्कोटलैण्ड में, सबसे पहले प्राकृतिक लघुगणक (natural logarithm) की खोज की। केपलर ने ग्रहों की गति के गणितीय नियमों को बनाने में सफलता हासिल की। विश्लेषणात्मक ज्यामिति (analytic geometry) जो एक फ्रांसीसी गणितज्ञ और दार्शनिक रेन देस्कर्ट्स (Rene Descartes) (1596-1650) के द्वारा विकसित की गयी, ने उन कक्षों को कार्तीय निर्देशांक में एक लेखाचित्र पर निर्देशित किया।

**अठारहवीं सदी :** लिओनहार्ड यूल्सइमेन्युल हंडमेन (Emanuel Handmann) के द्वारा 1700 का सबसे प्रभावी गणितज्ञ था, लिओनहार्ड यूल्स। उनके योगदान की शृंखला है ग्राफ सिद्धांत (Graph theory) के अध्ययन से लेकर (सेवन ब्रिजेस ऑफ  $K_3^6$  निम्ब्सबर्ग) (Seven Bridges of Königsberg) तक, समस्याएँ जो कई आधुनिक गणितीय नियम और संकेतनों का मानकीकरण करती हैं। उदाहरण के लिए, उन्होंने ऋणात्मक 1 के वर्ग मूल को प्रतीक  $i$  ( $i$ ) के द्वारा बताया, और उन्होंने एक वृत्त की परिधि और व्यास के अनुपात को बताने के लिए ग्रीक शब्द के उपयोग को लोकप्रिय बनाया। उन्होंने टोपोलोजी, लेखाचित्र सिद्धांत, कलन, संचयिका और जटिल विश्लेषण के अध्ययन में असंख्य योगदान दिए, जैसा कि असंख्य प्रमेय और संकेतनों का श्रेय उन्हें जाता है।

अठारहवीं शताब्दी के अन्य महत्वपूर्ण यूरोपीय गणितज्ञों में शामिल हैं जोसेफ लुइस लेग्रेंज (Joseph Louis Lagrange), जिन्होंने अंक सिद्धांत, बीज गणित, अवकल कलन और चरों के कलन, पर अग्रणी कार्य किया है, और लाप्लेस (Laplace) जिन्होंने, नेपोलियन के युग में खगोल यांत्रिकी (celestial mechanics) की नींव पर और सांख्यिकी पर कार्य किया।

**उन्नीसवीं सदी :** ज्यामिति के तीनों प्रकारों में से प्रत्येक में एक सामान्य लंब से युक्त रेखाओं का व्यवहार। 19 वीं सदी के दौरान, गणित तेजी से बढ़ता हुआ सार बन गई। 19वीं सदी में कार्ल फ्रेडरिक गॉस (Carl Friedrich

(1777-1855) रहते थे। विज्ञान में अपना योगदान देने के अलावा, उन्होंने, शुद्ध गणित में भी ज्यामिति में जटिल चरों (complex variable) के फलन पर और शृंखला के अभिकेंद्रण पर क्रांतिकारी कार्य किया। उन्होंने बीज गणित की मूल प्रमेय (fundamental theorem of algebra) के तथा द्विघाती पारस्परिकता नियम (quadratic reciprocity law) के पहले संतोषजनक प्रमाण दिए। इस सदी में गैर युक्लिड ज्यामिति (non-Euclidean geometry) के दो रूपों का विकास हुआ, जहाँ युक्लिड ज्यामिति (parallel postulate) की समानान्तर अभिधारणा (Euclidean geometry) अब नहीं रही। रूसी गणितज्ञ निकोलाइ इवानोविच लोबाचेवस्की (Nikolai Ivanovich Lobachevsky) और उसके प्रतिद्वंद्वी, हंगरी गणितज्ञ जेनोस बोल्याई (Janos Bolyai) ने स्वतंत्र रूप से हाइपरबोलिक ज्यामिति (Hyperbolic geometry) को परिभाषित किया और उसका अध्ययन किया, अब समानान्तर की अद्वितीयता नहीं रही। इस ज्यामिति में एक त्रिभुज में कोणों का योग जुड़कर 180 डिग्री से कम रहता है। दीर्घवृत्तीय ज्यामिति (Elliptic geometry) का विकास बाद में 19वीं सदी में जर्मन गणितज्ञ बर्नहार्ड रिमैन (Bernhard Riemann) के द्वारा किया गया; यहाँ कोई भी समानान्तर नहीं मिलते हैं और एक त्रिभुज में कोण जुड़कर 180 डिग्री से अधिक बनाते हैं। रिमैन ने रिमैन ज्यामिति (Riemannian geometry) का भी विकास किया, जो बड़े पैमाने पर तीन प्रकार की ज्यामिति को एकीकृत और सामान्यीकृत करता है, और उन्होंने मेनिफोल्ड (manifold) अवधारणा को ही परिभाषित किया, जो वक्र (curve) और सतह (surface) के विचार को सामान्य रूप से प्रस्तुत करती है।

**बीसवीं सदी :** बीसवीं शताब्दी में गणित एक मुख्य पेशा बन गया। हर साल हजारों लोगों को गणित में नई पीएचडी की उपाधि से सम्मानित किया जाता है और अध्यापन और उद्योग दोनों में नौकरियाँ उपलब्ध हैं। प्रारम्भिक शताब्दियों में, किसी भी एक समय पर दुनिया में कुछ ही रचनात्मक गणितज्ञ होते थे।

अधिकांश भाग के लिए, गणितज्ञ या तो सम्पत्ति के साथ पैदा हुए जैसे नेपियर (Napier), या उन्हें किसी अमीर संरक्षक का समर्थन मिला जैसे गाऊस (Gauss)। कुछ ही लोग ऐसे थे जिन्होंने अपनी आजीविका को विश्वविद्यालयों में शिक्षण के द्वारा चलाया जैसे फूरियर। नील्स हेनरिक अबेल (Niels Henrik Abel) कोई स्थिति प्राप्त नहीं कर पाए और 26 साल की उम्र में गरीबी और कुपोषण तथा क्षय रोग के कारण मर गए।

सन् 1900 में गणितज्ञों की अंतर्राष्ट्रीय कांग्रेस (International Congress of Mathematicians) के लिए एक भाषण में, डेविड हिल्बर्ट ने गणित में 23 नसुलझी समस्याओं (23 unsolved problems in mathematics) की एक सूची दी। ये समस्याएँ गणित के कई क्षेत्रों में फैली थीं, इन्होंने 20 वीं शताब्दी के अधिकांश गणितज्ञों का ध्यान आकर्षित किया। आज 10 सुलझ गई हैं, 7 आंशिक रूप से सुलझ गई हैं, और 2 अभी भी खुली हैं। बची हुई 4 ऐसी हैं कि जिनके बारे में यह नहीं कहा जा सकता कि वे सुलझ पाएँगी या नहीं।

प्रसिद्ध ऐतिहासिक अनुमानों को अंततः साबित किया गया। 1976 में, वोल्फगैंग हाकेन (Wolfgang Haken) और केनेथ अप्पेल (Kenneth Appel) ने चार रंग की प्रमेय (four color theorem) को प्रमाणित करने के लिए एक कम्प्यूटर का उपयोग किया। एंड्रयू विल्स (Andrew Wiles) ने दूसरों के कार्य पर काम करते हुए, 1995 में फर्मेट की अन्तिम प्रमेय (Fermat's Last Theorem) को प्रमाणित किया। पॉल कोहेन (Paul Cohen) और कर्त गोडेल (Kurt Godel) ने साबित किया कि सतत परिकल्पना (continuum hypothesis) समुच्चय सिद्धांत के मानक स्वतः सिद्ध प्रमाणों (independent) से स्वतंत्र (standard axioms of set theory) है (जिसे इससे प्रमाणित या अप्रमाणित नहीं किया जा सकता है)।

—सहायक आचार्य (गणित विभाग)

राजकीय अभियांत्रिकी एवं प्रौद्योगिकी महाविद्यालय,  
बीकानेर-334005 (राज.)

1. कक्षा 1 से 8 के लिए परीक्षा एवं कक्षोन्नति नियम सत्र 2012-2013 से लागू। □ 2. सीसीई विद्यालयों से उत्तीर्ण विद्यार्थियों के प्रवेश के सम्बन्ध में। □ 3. नेशनल ओपन स्कूल, नई दिल्ली की माध्यमिक परीक्षा 2003 निर्धारित पाँच विषयों हिन्दी, अंग्रेजी, सामाजिक विज्ञान, विज्ञान तथा गणित सहित प्रत्येक विषय में न्यूनतम 33 प्रतिशत अंक प्राप्त कर उत्तीर्ण होने पर राजस्थान बोर्ड की माध्यमिक परीक्षा के समकक्ष मान्य बाबत। □ 4. प्रारम्भ में अध्यापक ग्रेड तृतीय (अब अध्यापक) पद पर नियुक्त एवं 01.07.1998 से पूर्व वरिष्ठ अध्यापक पद पर पदोन्नत अध्यापकों को तृतीय एसीपी स्वीकृत करने के सम्बन्ध में। □ 5. निःशुल्क एवं अनिवार्य बाल शिक्षा का अधिकार अधिनियम 2009 के क्रियान्वयन के सम्बन्ध में दिशा-निर्देश □ 6. मूल पदस्थापन स्थान पर कार्य ग्रहण हेतु कार्यमुक्त किये जाने बाबत। □ 7. सूचना के अधिकार के तहत माननीय सूचना आयोग के निर्णयों की पालना सुनिश्चित करने बाबत। □ 8. राज्य सूचना आयोग द्वारा लिये गये निर्णय के पालनार्थ बाबत।

### 1. कक्षा 1 से 8 के लिए परीक्षा एवं कक्षोन्नति नियम सत्र 2012-2013 से लागू

• कार्यालय निदेशक, प्रारम्भिक शिक्षा राजस्थान, बीकानेर • क्रमांक : शिविरा/प्राशि/शैक्षिक/एबी/3511/2011-12 दिनांक : 26.10.12 • विषय : परीक्षा एवं कक्षोन्नति नियम (सत्र 2012-13 से लागू) बाबत। • उपर्युक्त विषयान्तर्गत प्रमुख शासन सचिव, स्कूल एवं संस्कृत शिक्षा जयपुर द्वारा जारी परिपत्र क्रमांक प.1(4)प्राशि/2012 दिनांक 08.10.12 की प्रति संलग्न कर निर्देशित किया जाता है कि उक्त परीक्षा एवं कक्षोन्नति नियम 2012-13 से लागू होंगे। इस कक्षोन्नति नियमों के अनुरूप परीक्षा एवं कक्षोन्नति की प्रक्रिया संपादित करने हेतु समस्त संस्था प्रधानों को भी निर्देशित करावें। • ह., निदेशक

राजस्थान सरकार

प्रारम्भिक शिक्षा विभाग

क्रमांक : प.1(4)/प्राशि/2012

जयपुर, दिनांक : 8.10.12

#### परिपत्र

एज्यूकेशन कोड (शिक्षा संहिता) के अध्याय 8 में प्रकाशित नियमों, उप नियमों एवं समय-समय पर जारी संशोधनों/परिवर्धनों के अतिक्रमण में शैक्षिक सत्र 2012-2013 से निम्न परीक्षा एवं कक्षोन्नति नियम लागू किये जाते हैं। इनकी पालना सुनिश्चित करावें—

#### प्रारम्भिक शिक्षा परीक्षा एवं कक्षोन्नति नियम (सत्र 2012-13 से लागू)

1. क्षेत्र : 1. ये नियम परीक्षा एवं कक्षोन्नति नियम कहलाएँ तथा राजस्थान के राजकीय एवं मान्यता प्राप्त प्राथमिक विद्यालयों, उच्च प्राथमिक विद्यालयों, संस्कृत शिक्षा के विद्यालयों, शिक्षाकर्मि बोर्ड द्वारा संचालित विद्यालयों, मदरसा बोर्ड द्वारा पंजीकृत मदरसों तथा राजकीय माध्यमिक/उच्च माध्यमिक विद्यालयों की कक्षा 1 से 8 पर लागू होंगे। 2. यह दिशा निर्देश उन विद्यालयों पर लागू नहीं होंगे जिनमें सतत एवं व्यापक मूल्यांकन व्यवस्था लागू है।

2. सामान्य निर्देश : 2.1 परीक्षा प्रवेश योग्यता— 1. कक्षा 1 से 8 की परीक्षाओं में केवल वे ही विद्यार्थी प्रविष्ट हो सकेंगे जिन्होंने किसी शिक्षण संस्था में नियमित विद्यार्थी के रूप में सत्र पर्यन्त अध्ययन किया हो। 2. विद्यार्थी के जन्म प्रमाण पत्र, अस्पताल/सहायक नर्स और दाई (ए.एन.एम.) रजिस्टर/अभिलेख, आंगनबाड़ी अभिलेख अथवा माता-पिता या संरक्षक द्वारा बालक की आयु की घोषणा के आधार पर कक्षा 1 से 8 तक आयु अनुरूप प्रवेश दिया जा सकेगा, परन्तु किसी भी बालक को जन्म के प्रमाण पत्र/आयु प्रमाण पत्र के अभाव

में प्रवेश से इन्कार नहीं किया जायेगा। आयु अनुरूप प्रवेशित बालकों की दक्षताओं का संस्था प्रधान की अध्यक्षता में गठित समिति द्वारा आकलन कर कक्षा अनुरूप स्तर लाने के लिए विशेष प्रशिक्षण की व्यवस्था की जायेगी। 3. राज्य सरकार द्वारा मान्य, बिन्दु-1 में उल्लेखित संस्था द्वारा प्रदत्त स्थानान्तरण प्रमाण पत्र के आधार पर उत्तीर्ण कक्षा से अगली कक्षा में नियमानुसार प्रवेश दिया जा सकेगा।

2.2 उपस्थिति गणना एवं अनिवार्यता— 1. कक्षा 1-8 तक सत्र पर्यन्त आयोजित होने वाले सामयिक परख एवं अर्द्ध-वार्षिक परीक्षा में अनुपस्थित रहने की स्थिति में संस्था प्रधान अनुपस्थिति के कारणों की सन्तुष्टि के पश्चात् विद्यार्थियों के विद्यालय में उपस्थित होने पर सामयिक परख/अर्द्ध-वार्षिक परीक्षा की व्यवस्था पृथक् से करेगा। यह परीक्षा उन्हीं विषयों की आयोजित की जाए जिनमें विद्यार्थी पूर्व में अनुपस्थित रहा है। 2. कक्षा 1 से 8 तक में नियमित विद्यार्थियों की उपस्थिति की गणना विद्यालय प्रारम्भ होने की तिथि से तथा नवीन प्रवेश लेने वाले विद्यार्थियों की उपस्थिति गणना प्रवेश लेने की तिथि (शिविरा पंचांग में अंकित अन्तिम प्रवेश तिथि तक अथवा विस्तारित कालावधि) से वार्षिक परीक्षा तैयारी अवकाश से पूर्व दिवस तक मानी जायेगी। यह न्यूनतम उपस्थिति 70 प्रतिशत होगी। 3. जो विद्यार्थी लगातार 45 दिन तक विद्यालय से अनुपस्थित रहता है अथवा 2.2 (2) के अनुसार आवश्यक उपस्थिति स्तर प्राप्त नहीं करता है तो ऐसे विद्यार्थी को ड्रॉप आउट मानते हुए आयु अनुरूप पुनः प्रवेश की कार्यवाही की जाकर उसे विशेष प्रशिक्षण के माध्यम से उस कक्षा के स्तर तक लाया जावेगा। 4. संस्था प्रधान संतुष्ट होने के बाद विद्यार्थियों की रूग्णता अथवा युक्तियुक्त कारणों से वार्षिक परीक्षा में बैठने के लिए उपस्थिति में अपने विवेकानुसार अधिकतम 10 प्रतिशत तक छूट दे सकेंगे। विद्यार्थी द्वारा रूग्णता प्रमाण पत्र सात दिवस की अवधि में प्रस्तुत किया जायेगा।

2.3 परीक्षा तैयारी अवकाश— 1. शिविरा पंचांग के निर्देशानुसार कक्षा 1 से 8 के विद्यार्थियों को अर्द्धवार्षिक परीक्षा हेतु 1 दिन तथा वार्षिक परीक्षा हेतु 2 दिन का परीक्षा तैयारी अवकाश दिया जाएगा। इन दिनों में विद्यालय खुला रहेगा। अध्यापक व अन्य कर्मचारी अभिलेख तथा परीक्षा से सम्बन्धित व्यवस्था कार्य पूरा करेंगे। इस प्रकार का अवकाश रविवार एवं राजपत्रित अवकाशों के अतिरिक्त होगा। 2. जिन उच्च माध्यमिक/माध्यमिक/उच्च प्राथमिक विद्यालयों में माध्यमिक शिक्षा बोर्ड का परीक्षा केन्द्र है, वहाँ बोर्ड परीक्षा अवधि में कक्षा 1 से 8 का अध्यापन कार्य यथावत जारी रहेगा। इस कार्य हेतु दोपहर 12.00 से सायं 2.30 बजे तक शिविरा पंचांग के अनुसार समयावधि रहेगी।

2.4 प्रश्न पत्र व्यवस्था— 1. सभी प्रकार की परीक्षाओं एवं सामयिक परख के लिए प्रश्न पत्रों की व्यवस्था विद्यालय स्तर पर की जायेगी। संस्था प्रधान

सामयिक परखों, अर्द्ध-वार्षिक एवं वार्षिक परीक्षा के प्रश्न पत्र परीक्षा तिथि से पूर्व शिक्षकों से तैयार करवाकर सुरक्षित रख लें। 2. संस्था प्रधान मूल्यांकन कार्य हेतु सत्र के प्रारम्भ में ही प्रत्येक विद्यार्थी के लिये प्रत्येक विषय हेतु एक सतत मूल्यांकन फोल्डर (फाईल) उपलब्ध करवायेंगे, जिसमें सत्र पर्यन्त आयोजित होने वाली परीक्षाओं, प्रोजेक्ट कार्य एवं विद्यार्थियों के द्वारा किये गये मौलिक कार्य आदि से सम्बन्धित रिकॉर्ड रखा जायेगा। एक अन्य फोल्डर में चित्रकला, संगीत, स्वास्थ्य, स्वच्छता, व्यक्तिगत एवं सामाजिक विकास सम्बन्धित कार्यों से सम्बन्धित रिकॉर्ड रखा जायेगा। यह फोल्डर विद्यालय में सम्बन्धित शिक्षक एवं विद्यार्थी द्वारा संधारित किया जाएगा। इसका उपयोग विद्यार्थियों की प्रगति के लिए शाला प्रबंधन समिति एवं अभिभावकों के साथ आयोजित की जाने वाली बैठकों में भी किया जाएगा।

**2.5 सामयिक परख एवं परीक्षाएँ-** सम्बन्धित सत्र में विभागीय पंचांग में दिये गये निर्देशानुसार कक्षा 1 से 8 तक की सामयिक परख एवं परीक्षाएँ आयोजित होंगी।

**2.6 शैक्षिक उपलब्धियों का मूल्यांकन (परीक्षा परिणाम)-** 1. संस्था प्रधान द्वारा प्रत्येक सामयिक परख व अर्द्धवार्षिक परीक्षा के प्रगति पत्र अभिभावकों को निश्चित दिनांक पर विद्यालय में बुलाकर दिखाये जाएँगे। इस दिन अभिभावकों की बैठक आयोजित कर उन्हें विद्यार्थियों की शैक्षिक प्रगति से अवगत करायेंगे। 2. शिविशा पंचांग के अनुसार निर्दिष्ट दिनांक को वार्षिक परीक्षा परिणाम घोषित करने के पश्चात् प्रगति पत्र अभिभावकों को दिये जायेंगे।

**2.7 पूर्णांक-** कक्षा 1 से 8 हेतु विभिन्न सामयिक परखों एवं परीक्षाओं के लिए विषयवार अंक विभाजन संलग्न परिशिष्ट क, ख एवं ग के अनुसार होंगे।

**2.8 उत्तीर्णता नियम-** 1. विद्यार्थियों को उनकी सामयिक परखों, अर्द्धवार्षिक एवं वार्षिक परीक्षाओं के प्राप्तांकों के योग के आधार पर ग्रेड दी जायेगी।

**2. ग्रेड निर्धारण नियम-** कक्षा 1 से 2 के विद्यार्थी के प्रगति पत्र में परिशिष्ट 'क' के अनुसार, कक्षा 3 से 5 के विद्यार्थी के प्रगति पत्र में परिशिष्ट 'ख' के अनुसार तथा कक्षा 6 से 8 तक के विद्यार्थी के प्रगति पत्र में परिशिष्ट 'ग' के अनुसार प्राप्तांक भरे जाएँगे। प्राप्तांकों के योग के आधार पर ग्रेड निम्नानुसार दी जायेगी-

क्र.सं.	प्राप्तांकों का प्रतिशत	ग्रेड
1.	0 से 30 प्रतिशत तक	ई/E
2.	31 से 50 प्रतिशत तक	डी/D
3.	51 से 70 प्रतिशत तक	सी/C
4.	71 से 85 प्रतिशत तक	बी/B
5.	86 से 100 प्रतिशत तक	ए/A

**नोट :-** 1. प्रतिशत में भिन्नांश को आगामी पूर्णांक में माना जायेगा। तीनों परखों, अर्द्धवार्षिक तथा वार्षिक परीक्षा के प्राप्तांक यदि भिन्न में हो तो उन्हें अगले पूर्णांक में परिवर्तित कर दिया जाए। 2. कक्षा 1 से 8 में नियमित विद्यार्थी के रूप में परीक्षा में प्रविष्ट होने वाले सभी विद्यार्थी उत्तीर्ण/प्रोन्नत घोषित किये जायेंगे।

**2.9 अतिरिक्त शिक्षण-** 1. प्रत्येक सामयिक परख/अर्द्ध-वार्षिक परीक्षा के पश्चात् उन विद्यार्थियों को जिन्होंने अपेक्षित स्तर प्राप्त नहीं किया है, अध्यापक द्वारा अतिरिक्त शिक्षण दिया जायेगा। अतिरिक्त शिक्षण के बाद विद्यार्थियों की पुनः जाँच होगी तथा इस पुनः जाँच के परिणाम को मूल्यांकन का आधार मानकर प्रगति पत्र में प्रविष्टि की जायेगी।

**2. विशेष परीक्षा-** 1. वार्षिक परीक्षा में सम्मिलित होने योग्य विद्यार्थी यदि वार्षिक परीक्षा में रूग्णता प्रमाण पत्र अथवा युक्तियुक्त कारण का प्रार्थना पत्र देता है अथवा किसी विषय विशेष में ई ग्रेड प्राप्त करता है तो उसे उन सभी विषयों में 1-15 मई की अवधि में अतिरिक्त शिक्षण दिया जाकर उसे कक्षा के अन्य विद्यार्थियों के स्तर तक लाने हेतु प्रयास किया जायेगा। इसकी जाँच हेतु विशेष परीक्षा का आयोजन किया जाएगा। विशेष परीक्षा विद्यालय स्तर पर आयोजित की जावेगी। 2. इस विशेष परीक्षा के उपरान्त भी यदि कोई विद्यार्थी अपेक्षित स्तर प्राप्त नहीं करता है तो उसे आगामी सत्र के प्रारम्भ से आगामी कक्षा के साथ-साथ उन विषयों के लिए जिनमें अपेक्षित स्तर प्राप्त नहीं किया है, में विशेष शिक्षण दिया जाकर कक्षा के अन्य विद्यार्थियों के बराबर स्तर पर लाया जायेगा। यह प्रक्रिया अपेक्षित अधिगम स्तर प्राप्त होने तक जारी रहेगी।

**3. सतत मूल्यांकन फोल्डर का रखरखाव-** विद्यार्थियों के सतत मूल्यांकन फोल्डर को विद्यालय में संधारित किया जायेगा। यह सतत मूल्यांकन फोल्डर अपेक्षित अधिगम स्तर प्राप्त किये जाने तक संधारित किया जायेगा। इस सतत मूल्यांकन फोल्डर में दर्शाये गये मूल्यांकन के आधार पर परीक्षाफल की प्रविष्टि परीक्षाफल पंजिका में स्थायी रूप से अंकित की जायेगी। परीक्षाफल पंजिका 5 वर्ष तक एवं सतत मूल्यांकन फोल्डर एक वर्ष तक सुरक्षित रखे जाएँ।

**4. विद्यार्थी संचयी अभिलेख-** विद्यार्थी संचयी अभिलेख विद्यार्थी के सर्वांगीण विकास के समस्त क्षेत्रों/पक्षों की प्रगति को समग्र रूप से प्रस्तुत करता है। इस अभिलेख में बालक के विकास की प्रक्रिया, सामाजिक भावात्मक विकास, पसन्द, रुचि, मजबूत पक्ष एवं एक समय विशेष में होने वाली प्रगति का आकलन परिलक्षित होता है। (1) अभिलेख के प्रथम पृष्ठ के अधिकांश कॉलम की पूर्ति सत्रारम्भ में ही कर दी जाये। (2) संचयी अभिलेख प्रपत्र में विद्यार्थी के अध्ययन काल के वर्षों से सम्बन्धित सूचनाएँ अंकित की जाएँ। जब विद्यार्थी विद्यालय छोड़कर अन्यत्र जाता है, उस समय कक्षाध्यापक द्वारा समस्त पूर्ति की जाँच की जाकर संस्थाप्रधान के हस्ताक्षर सहित विद्यार्थी को यह अभिलेख उपलब्ध करवाया जाये। (3) कक्षा 1-8 में संगीत, चित्रकला, स्वास्थ्य एवं शारीरिक शिक्षा, व्यक्तित्व, व्यक्तिगत एवं सामाजिक गुणों के विकास आदि का विवरणात्मक कथन का निर्धारण कक्षाध्यापक द्वारा विषय अध्यापकों के साथ चर्चा एवं विचार विमर्श करने के उपरान्त दर्ज किया जाना है। वर्ष पर्यन्त विद्यार्थी द्वारा उपर्युक्त क्षेत्रों में किये गये विशिष्ट कार्यों के सम्बन्ध में घटनावृत्त अभिलेख "सतत मूल्यांकन फोल्डर (फाईल)" में संधारित किया जायेगा। सत्र के अन्त में निर्धारित स्थान पर समेकित टिप्पणी अंकित की जायेगी। (4) यदि कोई विद्यार्थी शैक्षिक सत्र के मध्य में किसी कारणवश विद्यालय छोड़ अन्यत्र कहीं अध्ययन हेतु पलायन करता है तो उसका संचयी अभिलेख प्रपत्र उसकी अध्ययनरत कक्षा के स्तर तक का भरा जाये तथा स्थानान्तरण प्रमाण पत्र के साथ ही दिया जाये।

**5. अन्य नियम-** 1. प्रारम्भिक शिक्षा पूर्ण किये जाने पर प्रमाण पत्र निर्धारित प्रारूप में विद्यार्थियों को दिया जायेगा। 2. परीक्षाफल घोषित होने के



पश्चात परीक्षाफल की एक प्रति नियंत्रण अधिकारी को प्रेषित की जायेगी। 3. विद्यालय द्वारा परीक्षाफल घोषित करने के पश्चात परीक्षार्थियों को उनके प्रगति पत्र दिए जायेंगे। 4. प्रगति पत्र की पूर्ति संचयी अभिलेख प्रपत्र के आधार पर की जायेगी। 5. प्रगति पत्र/प्रमाण पत्र की दूसरी प्रति प्रार्थना पत्र प्रस्तुत करने पर निर्धारित शुल्क 5 रुपये प्राप्त कर दी जायेगी, जिस पर द्वितीय प्रति अंकित कर तथा स्थाई अभिलेख में प्रविष्टि की जायेगी एवं तृतीय प्रति 10 रुपये निर्धारित शुल्क प्राप्त कर दी जाए।

**संलग्न :** विषयवार अंक विभाजन (परिशिष्ट क, ख एवं ग)

1. परिशिष्ट क - कक्षा 1 व 2, 2. परिशिष्ट ख - कक्षा 3 से 5, 3. परिशिष्ट ग - कक्षा 6 से 8, 4. परिशिष्ट घ - संचयी अभिलेख प्रपत्र।  
• ह., वीनू गुप्ता, प्रमुख शासन सचिव, स्कूल एवं संस्कृत शिक्षा।

**परिशिष्ट (क)**

## 2.7 विषयवार अंक विभाजन कक्षा- 1, 2

विषयवार अंक विभाजन : कक्षा 1										विषयवार अंक विभाजन : कक्षा 2													
विषय	अर्द्ध-वार्षिक			वार्षिक			सर्व योग			विषय	अर्द्ध-वार्षिक			वार्षिक			सर्व योग						
	मौखिक	लिखित	योग	मौखिक	लिखित	योग	मौखिक	लिखित	योग		मौखिक	लिखित	योग	मौखिक	लिखित	योग	मौखिक	लिखित	योग				
हिन्दी	70	30	100	70	30	100	140	60	200	हिन्दी	70	30	100	70	30	100	140	60	200				
गणित	70	30	100	70	30	100	140	60	200	गणित	70	30	100	70	30	100	140	60	200				
अंग्रेजी	35	15	50	35	15	50	70	30	100	अंग्रेजी	35	15	50	35	15	50	70	30	100				
पर्यावरण			50			50			100			पर्यावरण			50			50			100		
कार्यानुभव			25			25			50			कार्यानुभव			25			25			50		
कला शिक्षा			25			25			50			कला शिक्षा			25			25			50		
स्वा. शिक्षा			50			50			100			स्वा. शिक्षा			50			50			100		

- नोट :** 1. पर्यावरण, कार्यानुभव, कला शिक्षा व स्वास्थ्य शिक्षा का गतिविधि आधारित मूल्यांकन किया जायेगा एवं ग्रेड 2.8 (2) के अनुसार दी जावेगी।  
2. मौखिक मूल्यांकन हेतु विद्यार्थी के सतत मूल्यांकन फोल्डर में संग्रहित कार्यों को भी आधार बनाया जाये।

**परिशिष्ट (ख)**

## 2.7 विषयवार अंक विभाजन (कक्षा 3 से 5)

क्र.सं.	विषय	सामयिक जाँच			अर्द्धवार्षिक मूल्यांकन			वार्षिक मूल्यांकन			सर्व योग
		प्रथम	द्वितीय	तृतीय	मौखिक	लिखित	योग	मौखिक	लिखित	योग	
1.	हिन्दी	10	10	10	20	50	70	40	60	100	200
2.	अंग्रेजी	5	5	5	10	25	35	20	30	50	100
3.	गणित	10	10	10	20	50	70	40	60	100	200
4.	पर्यावरण अध्ययन	10	10	10	20	50	70	40	60	100	200
		प्रथम मूल्यांकन		द्वितीय मूल्यांकन	तृतीय मूल्यांकन		चतुर्थ मूल्यांकन	पंचम मूल्यांकन		योग	
5.	कार्यानुभव	20		20	20		20	20		100	
6.	कला शिक्षा	20		20	20		20	20		100	
7.	स्वास्थ्य एवं शारीरिक शिक्षा	20		20	20		20	20		100	

- नोट :** 1. क्रम संख्या 5, 6 व 7 पर अंकित विषयों के गतिविधि आधारित मूल्यांकन क्रमशः प्रथम, द्वितीय एवं तृतीय सामयिक जाँच तथा अर्द्धवार्षिक व वार्षिक परीक्षा के साथ ही किये जाएँगे एवं ग्रेड 2.8(2) के अनुसार दी जावेगी।  
2. मौखिक मूल्यांकन हेतु विद्यार्थी के सतत मूल्यांकन फोल्डर में संग्रहित कार्यों को भी आधार बनाया जाए।

2.7 विषयवार अंक विभाजन (कक्षा 6 से 8)

क्र. सं.	परीक्षा का प्रकार	प्रथम परख			द्वितीय परख			तृतीय परख			अर्द्धवार्षिक			वार्षिक			योग	
	विषय एवं अंक योजना	लिखित (शिक्षक द्वारा)	गतिविधि मौखिक, प्रोजेक्ट, प्रायोगिक (शिक्षक द्वारा)	योग	लिखित (शिक्षक द्वारा)	गतिविधि मौखिक, प्रोजेक्ट, प्रायोगिक (शिक्षक द्वारा)	योग	लिखित (शिक्षक द्वारा)	गतिविधि मौखिक, प्रोजेक्ट, प्रायोगिक (शिक्षक द्वारा)	योग	लिखित (शिक्षक द्वारा)	गतिविधि मौखिक, प्रोजेक्ट, प्रायोगिक (शिक्षक द्वारा)	योग	लिखित (शिक्षक द्वारा)	गतिविधि मौखिक, प्रोजेक्ट, प्रायोगिक (शिक्षक द्वारा)	योग		
1.	हिन्दी	5	5	10	5	5	10	5	5	10	50	20	70	70	30	100	200	
2.	अंग्रेजी	5	5	10	5	5	10	5	5	10	50	20	70	70	30	100	200	
3.	तृतीय भाषा	5	5	10	5	5	10	5	5	10	50	20	70	70	30	100	200	
4.	गणित	5	5	10	5	5	10	5	5	10	50	20	70	70	30	100	200	
5.	विज्ञान	5	5	10	5	5	10	5	5	10	50	20	70	70	30	100	200	
6.	सा.विज्ञान	5	5	10	5	5	10	5	5	10	50	20	70	70	30	100	200	
क्र. सं.	परीक्षा का प्रकार	प्रथम मूल्यांकन			द्वितीय मूल्यांकन			तृतीय मूल्यांकन			चतुर्थ मूल्यांकन			पंचम मूल्यांकन			योग	ग्रेड
7.	कार्यानुभव	20			20			20			20			20			100	
8.	कला शिक्षा	20			20			20			20			20			100	
9.	स्वास्थ्य एवं शा. शिक्षा	20			20			20			20			20			100	

- नोट : 1. क्रम संख्या 7, 8 एवं 9 पर अंकित विषयों के गतिविधि आधारित मूल्यांकन किया जायेगा एवं ग्रेड 2.8(2) के अनुसार दी जावेगी।  
2. मौखिक मूल्यांकन हेतु विद्यार्थी के सतत मूल्यांकन फोल्डर में संग्रहित कार्यों को भी आधार बनाया जाये।

परिशिष्ट (घ)

प्रारम्भिक शिक्षा विभाग, राजस्थान

विद्यार्थी संचयी अभिलेख

सत्र ..... से ..... तक

विद्यालय का नाम .....

डायस कोड .....

विद्यार्थी का नाम .....

लिंग : छात्र/छात्रा श्रेणी .....

एससी/एसटी/ओबीसी/अपिब/ सामान्य/अन्य)

माता का नाम .....

पिता का नाम .....

संरक्षक का नाम .....

विद्यार्थी के साथ सम्बन्ध .....

कक्षा ..... प्रवेशांक ..... प्रवेश दिनांक .....

जन्म दिनांक (अंकों में) .....

जन्म दिनांक (शब्दों में) .....

विशेष आवश्यकता (सीडब्ल्यूएसएन) विवरण (यदि कोई हो तो) एमआर एचआई वीआई ओएच (सही का निशान अंकित करें)

स्थायी पता .....

.....

अन्यत्र जाने का कारण .....

कक्षा उत्तीर्ण ..... प्रवेश योग्य कक्षा .....

अभिलेख प्रपत्र जारी करने की दिनांक .....

कक्षाध्यापक का नाम  
एवं हस्ताक्षर

हस्ताक्षर  
अभिभावक

प्रधानाध्यापक का नाम  
एवं हस्ताक्षर मय सील

**संज्ञानात्मक क्षेत्र-**

**कक्षा 1-2 हेतु प्रारूप**

कक्षा .....

सत्र .....

विषय	हिन्दी	गणित	अंग्रेजी	पर्यावरण	कार्यानुभव	कला शिक्षा	स्वास्थ्य शिक्षा
ग्रेड							

समेकित टिप्पणी (सृजनात्मकता, रुचि, संवेदनशीलता, परिवेशीय सजगता, स्वच्छता आदि के सम्बन्ध में)-

**कक्षा 3-8 हेतु प्रारूप**

कक्षा .....

सत्र .....

विषय	हिन्दी	गणित	अंग्रेजी	पर्यावरण अध्ययन/ विज्ञान	सामाजिक विज्ञान	संस्कृत	कार्यानुभव	कला शिक्षा	स्वास्थ्य एवं शा. शिक्षा
ग्रेड									

समेकित टिप्पणी (आत्म विश्वास, देखभाल, सहयोग, पहल, समय की पाबन्दी, सृजनात्मकता, रुचि, संवेदनशीलता, परिवेशीय सजगता, स्वच्छता आदि के सम्बन्ध में)-

विद्यार्थी उपस्थिति विवरण-

सत्र	कक्षा	कुल मीटिंग	उपस्थिति	प्रतिशत उपस्थिति	नियमितता पर टिप्पणी

**परिशिष्ट घ-1**

विद्यार्थी का नाम ..... पिता का नाम ..... जन्मतिथि ..... एस.आर. नम्बर .....

**संज्ञानात्मक क्षेत्र-**

**कक्षा 1-8 हेतु प्रारूप**

विषय	कक्षा-1	कक्षा-2	कक्षा-3	कक्षा-4	कक्षा-5	कक्षा-6	कक्षा-7	कक्षा-8
	सत्र .....	सत्र .....	सत्र .....	सत्र .....	सत्र .....	सत्र .....	सत्र .....	सत्र .....
हिन्दी								
गणित								
अंग्रेजी								
पर्यावरण अध्ययन								
विज्ञान								
सा. विज्ञान								
संस्कृत/तृतीय भाषा								
कार्यानुभव								
कला शिक्षा								
स्वा. एवं शा. शिक्षा								
*समेकित टिप्पणी								

\*समेकित टिप्पणी (आत्म विश्वास, देखभाल, सहयोग, पहल, समय की पाबन्दी, सृजनात्मकता, रुचि, संवेदनशीलता, परिवेशीय सजगता, स्वच्छता आदि के सम्बन्ध में)

नोट : 1. विषय के सम्मुख कॉलम में ग्रेड अंकित की जाए।

हस्ताक्षर कक्षाध्यापक

हस्ताक्षर जाँचकर्ता

हस्ताक्षर प्रधानाध्यापक मय सील

विद्यार्थी उपस्थिति विवरण-

सत्र	कक्षा	कुल मीटिंग	उपस्थिति	प्रतिशत उपस्थिति	नियमितता पर टिप्पणी

## 2. सीसीई विद्यालयों से उत्तीर्ण विद्यार्थियों के प्रवेश के सम्बन्ध में

• कार्यालय निदेशक, प्रारम्भिक शिक्षा राजस्थान, बीकानेर • क्रमांक : शिविरा/प्रारं/शैक्षिक/एबी/3521/09-12 दिनांक : 03.10.12 • विषय : सीसीई विद्यालयों से उत्तीर्ण विद्यार्थियों के प्रवेश के सम्बन्ध में • प्रसंग : राजस्थान प्रारम्भिक शिक्षा परिषद के पत्रांक राप्रशिप/जय/सीसीई/12/6967 दिनांक : 8.8.12 • राज्य सरकार के आदेश के अनुसार जिन विद्यालयों में सीसीई, कार्यक्रम संचालित हो रहा है वहाँ से उत्तीर्ण होने वाले छात्रों को अंक न देकर ग्रेड दी जाती है तथा उन छात्रों को ग्रेड के आधार पर ही प्रवेश दिया जाना चाहिए। कुछ संस्था प्रधान ग्रेड के आधार पर उत्तीर्ण होने वाले विद्यार्थियों के प्रवेश में आनाकानी करते हैं। जो कि आर.टी.ई. प्रावधानों के विपरीत है। इसलिए समस्त संस्था प्रधानों को आप निर्देशित करें कि ग्रेड के आधार पर उत्तीर्ण विद्यार्थियों को प्रवेश देने से मना नहीं किया जावे। इस सम्बन्ध में आप द्वारा की गई कार्यवाही से इस कार्यालय को अवगत करावें। • ह., निदेशक, प्रारम्भिक शिक्षा, राजस्थान, बीकानेर।

## 3. नेशनल ओपन स्कूल, नई दिल्ली की माध्यमिक परीक्षा 2003 निर्धारित पाँच विषयों हिन्दी, अंग्रेजी, सामाजिक विज्ञान, विज्ञान तथा गणित सहित प्रत्येक विषय में न्यूनतम 33 प्रतिशत अंक प्राप्त कर उत्तीर्ण होने पर राजस्थान बोर्ड की माध्यमिक परीक्षा के समकक्ष मान्य बाबत

• कार्यालय निदेशक, माध्यमिक शिक्षा राजस्थान, बीकानेर • परिपत्र • राज्य सरकार ने सचिव, माध्यमिक शिक्षा बोर्ड, राजस्थान, अजमेर द्वारा जारी पत्र क्रमांक : माशिबो/2012/565 दिनांक 23.04.2012 के द्वारा यह (संलग्न कर) अवगत कराया है कि नेशनल ओपन स्कूल, नई दिल्ली की माध्यमिक परीक्षा, 2003 निर्धारित पाँच विषयों हिन्दी, अंग्रेजी, सामाजिक विज्ञान, विज्ञान तथा गणित सहित प्रत्येक विषय में न्यूनतम 33 प्रतिशत अंक प्राप्त कर उत्तीर्ण होने पर राजस्थान बोर्ड की माध्यमिक परीक्षा के समकक्ष मानी गई है। जबकि वर्तमान नियमों के अनुसार (वर्ष 2006 से) न्यूनतम पाँच विषयों में प्रत्येक में 33 प्रतिशत अंक प्राप्त कर उत्तीर्ण होने पर नेशनल ओपन स्कूल, नई दिल्ली की माध्यमिक परीक्षा राजस्थान बोर्ड की माध्यमिक परीक्षा के समकक्ष मानी गई है। माध्यमिक शिक्षा बोर्ड द्वारा यह समकक्षता शैक्षिक प्रयोजनार्थ निर्धारित है, अन्य प्रयोजनो/प्रशिक्षण/नियुक्ति/चयन/पदोन्नति आदि में सम्बन्धित अधिकारी को अपने स्तर से ही निर्णय लेना है। • ह., निदेशक, माध्यमिक शिक्षा, राजस्थान, बीकानेर। • क्रमांक : शिविरा/माध्य/मा-ब/22917/2010-11/82 दिनांक : 15.10.2012

## 4. प्रारम्भ में अध्यापक ग्रेड तृतीय (अब अध्यापक) पद पर नियुक्त एवं 01.07.1998 से पूर्व वरिष्ठ अध्यापक पद पर पदोन्नत अध्यापकों को तृतीय एसीपी स्वीकृत करने के सम्बन्ध में

• राजस्थान सरकार, शिक्षा (ग्रुप-2) विभाग • क्रमांक : प.17(48)शिक्षा-2/वि.प्र./2012 जयपुर, दिनांक : 12.10.12 • विषय : प्रारम्भ में अध्यापक ग्रेड तृतीय (अब अध्यापक) पद पर नियुक्त एवं 01.07.1998 से पूर्व वरिष्ठ अध्यापक पद पर पदोन्नत अध्यापकों को तृतीय एसीपी स्वीकृत करने के सम्बन्ध में। • उपरोक्त विषयान्तर्गत लेख है कि वित्त विभाग की अधिसूचना संख्या एफ.16(5)एफडी/रूल्स/98 दिनांक 07.08.98 द्वारा वरिष्ठ अध्यापक पद का वेतनमान निम्नानुसार पुनः संशोधित कर दिनांक 01.07.98 से प्रभावी किया गया था-

वरिष्ठ अध्यापक	प्रवेश वेतनमान	5500-9000
	10 वर्ष की सेवा पूर्ण करने के पश्चात वरिष्ठ वेतनमान	6500-10500
	वरिष्ठ वेतनमान में 8 वर्ष की सेवा पूर्ण करने के पश्चात चयनित वेतनमान	7500-12000

उपरोक्त अधिसूचना के अन्तर्गत वरिष्ठ अध्यापकों को वित्त विभाग के आदेश संख्या एफ.16(2) एफडी/रूल्स/98 दिनांक 17.02.98 के द्वारा स्वीकार्य चयनित वेतनमानों के स्थान पर वरिष्ठ एवं चयनित वेतनमान नियत सेवा अवधि पूर्ण करने पर दिनांक 01.07.98 से अनुज्ञेय किए गये थे। अध्यापक ग्रेड तृतीय जो वरिष्ठ अध्यापक पद पर पदोन्नत हो गए एवं जो द्वितीय चयनित वेतनमान 6500-10500 में वेतन आहरित कर रहे थे तथा वरिष्ठ अध्यापक पद पर 9 वर्ष की सेवा पूर्ण नहीं करते थे, वेतनमान 5500-10500 के पात्र थे परन्तु माननीय न्यायालय निर्णय के अधीन इन्हें व्यक्तिगत वेतनमान 6500-10500 अनुमत किया गया।

राजस्थान सिविल सेवा पुनरीक्षित वेतनमान नियम, 2008 के तहत राज्य कर्मचारियों के वेतनमान दिनांक 01.09.2006 से संशोधित किये गये। उक्त नियमों के अंतर्गत अध्यापकों को वरिष्ठ एवं चयनित वेतनमानों के स्थान पर एसीपी का लाभ अनुमत किया गया। वरिष्ठ अध्यापक जो वरिष्ठ वेतनमान 6500-10500 में वेतन प्राप्त कर रहे थे के साथ ही साथ 6500-10500 व्यक्तिगत वेतनमान प्राप्त कर रहे वरिष्ठ अध्यापकों का वेतन भी चालू वेतन बैंड 9300-34800 में

ग्रेड वेतन 4200 रुपये के साथ निर्धारित किया गया।

एसीपी स्वीकृति हेतु सक्षम प्राधिकारियों द्वारा उन वरिष्ठ अध्यापकों को जो व्यक्तिगत ग्रेड वेतन 4200 रुपये में वेतन आहरित कर रहे थे, को त्रुटिवश चालू वेतन बैंड 9300-34800 में 4200 रुपये ग्रेड वेतन के आधार पर तृतीय एसीपी ग्रेड वेतन 4800 रुपये स्वीकृत कर दिया गया। जब यह त्रुटि विभाग के ध्यान में आयी तो पत्र संख्या शिविरा/माध्य/स्थिरी-अ/34842/06/33 दिनांक 02.02.2011 द्वारा एसीपी स्वीकृति हेतु सक्षम समस्त प्राधिकारियों को निर्देशित किया गया कि वरिष्ठ अध्यापक जो व्यक्तिगत ग्रेड वेतन 4200 रुपये में वेतन आहरित कर रहे हैं की एसीपी वरिष्ठ अध्यापक हेतु विहित ग्रेड वेतन 3600 रुपये के आधार पर संशोधित की जावे।

उपरोक्त आदेश द्वारा प्रतिकूल रूप से प्रभावित वरिष्ठ अध्यापकों द्वारा माननीय उच्च न्यायालय में तृतीय एसीपी में ग्रेड वेतन 4800 रुपये स्वीकृत करने हेतु याचिका दायर की गई। माननीय उच्च न्यायालय द्वारा उक्त सभी याचिकाओं का सम्मिलित निर्णय दिनांक 26.09.2011 द्वारा पारित किया गया। (रिट पीटीशन संख्या 9063/2011 एवं अन्य सम्बन्धित पीटीशंस)

उपरोक्त न्यायिक निर्णय के अनुसार वरिष्ठ अध्यापक जो व्यक्तिगत ग्रेड वेतन 4200 रुपये में वेतन आहरित कर रहे थे तथा तृतीय एसीपी स्वीकृति से पूर्व वरिष्ठ अध्यापक पद पर 10 वर्ष की सेवा पूर्ण नहीं की है, को तृतीय एसीपी ग्रेड वेतन 4200 रुपये स्वीकृत की जाएगी। तृतीय एसीपी ग्रेड वेतन 4200 रुपये स्वीकृत करने पर ऐसे वरिष्ठ अध्यापकों के वेतन में चालू वेतन बैंड तथा ग्रेड वेतन 4200 रुपये के योग के 3 प्रतिशत के समान वृद्धि की जाएगी।

निम्नांकित श्रेणियों के वरिष्ठ अध्यापक तृतीय एसीपी में ग्रेड वेतन 4800 रुपये के पात्र हैं—

(1) अध्यापक ग्रेड तृतीय जो द्वितीय चयनित वेतनमान 6500-10500 में वेतन प्राप्त कर रहे थे तथा वरिष्ठ अध्यापक पद पर 01.07.98 से पूर्व पदोन्नत हो गए थे एवं जिन्हें वेतनमान 6500-10500 वरिष्ठ अध्यापक पद के वरिष्ठ वेतनमान के रूप में अनुमत किया गया था।

(2) अध्यापक ग्रेड तृतीय जो 01.07.1989 से 30.06.98 (दोनों दिवस शामिल) की अवधि के मध्य वरिष्ठ अध्यापक पद पर पदोन्नत हुए हैं तथा 10.09.2006 से पूर्व 10 वर्ष की सेवा पूर्ण कर ली है और फलस्वरूप व्यक्तिगत वेतनमान 6500-10500 वरिष्ठ अध्यापक के वरिष्ठ वेतनमान में परिवर्तित हो गया है। उपरोक्तानुसार लाभ याचिका सं. 9063/11 ज्योतिस्वरूप यादव व अन्य बनाम राज्य व अन्य 45 में पारित निर्णय दिनांक 26.09.11 से कवर पारित सभी निर्णयों एवं समान श्रेणी के सभी कार्मिकों को देय होगा।

वरिष्ठ अध्यापकों को एसीपी स्वीकृति हेतु सक्षम प्राधिकारियों को उपरोक्त स्पष्टीकरण अनुसार वरिष्ठ अध्यापकों को तृतीय एसीपी स्वीकृत करने हेतु निर्देशित किया जाता है। यह भी स्पष्ट किया जाता है कि शंका या संशय की स्थिति में अंग्रेजी का आदेश जो दिनांक 12.10.12 को ही जारी किया है, प्रभावी होगा।

ये निर्देश वित्त (नियम) विभाग की आई.डी. संख्या 221201438 दिनांक 04.10.2012 द्वारा प्राप्त सहमति उपरान्त जारी किये जाते हैं।

• ह., प्रमुख शासन सचिव, स्कूल एवं संस्कृत शिक्षा विभाग।

### 5. निःशुल्क एवं अनिवार्य बाल शिक्षा का अधिकार अधिनियम 2009 के क्रियान्वयन के सम्बन्ध में दिशा-निर्देश

• राजस्थान सरकार, स्कूल एवं संस्कृत शिक्षा विभाग, प्रारम्भिक शिक्षा (आयोजना) अनुभाग • क्रमांक : प.21(19)शिक्षा-1/प्राशि/2009 जयपुर, दिनांक : 19.10.2012 • परिपत्र • विषय : निःशुल्क एवं अनिवार्य बाल शिक्षा

का अधिकार अधिनियम 2009 के क्रियान्वयन के सम्बन्ध में दिशा-निर्देश। • निःशुल्क एवं अनिवार्य बाल शिक्षा का अधिकार अधिनियम, 2009 की धारा 35(2) में प्रदत्त शक्तियों का प्रयोग करते हुए वीडियो कान्फ्रेंसिंग के समय शिक्षा अधिकारियों द्वारा उठाई गई समस्याओं के संदर्भ में निम्नानुसार दिशा-निर्देश जारी किये जाते हैं—

1. 25 प्रतिशत सीट पर लिए गए प्रवेश का सत्यापन : 25 प्रतिशत सीट पर प्रवेश का कार्य प्राथमिक एवं उच्च प्राथमिक गैर-सरकारी संस्थाओं के मामलों में जिला शिक्षा अधिकारी, प्रारम्भिक शिक्षा एवं माध्यमिक/उच्च माध्यमिक गैर सरकारी संस्थाओं के मामलों में जिला शिक्षा अधिकारी माध्यमिक शिक्षा द्वारा अपने-अपने क्षेत्राधिकार में सम्पन्न किया जाएगा।

2. आय प्रमाण पत्र के सम्बन्ध में : राज्य सरकार ने आम नागरिकों को सुविधा की दृष्टि से आय प्रमाण-पत्र के सम्बन्ध में एक सरलीकृत प्रक्रिया अपनाई है। इसके अनुसार आय प्रमाण-पत्र के लिए माता-पिता/अभिभावक को कोई भी दो उत्तरदायी व्यक्तियों (संसद/वार्ड पंच/महापौर/नगर निगम सदस्य/नगर पालिका अध्यक्ष/नगरपालिका सदस्य/राजकीय अधिकारी/कर्मचारी होंगे) की साक्षी के आधार पर नोटेरी पब्लिक द्वारा सत्यापित शपथ पत्र प्रस्तुत करना होगा। यह शपथ पत्र बालक के प्रवेश दिए जाने वाले दिनांक के पूर्व के वित्तीय वर्ष (1 अप्रैल से 31 मार्च) की आय के सम्बन्ध में होगा। इस शपथ पत्र के आधार पर निःशुल्क एवं अनिवार्य बाल शिक्षा का अधिकार अधिनियम, 2009 के अन्तर्गत “असुविधाग्रस्त समूह” एवं “कमजोर वर्ग” के बालकों के लिए आरक्षित 25 प्रतिशत सीट पर प्रवेश दिया जाएगा।

3. रिक्त सीट को भरना : निःशुल्क एवं अनिवार्य बाल शिक्षा का अधिकार अधिनियम, 2009 के अन्तर्गत सम्बन्धित विद्यालय द्वारा 25 प्रतिशत प्रवेश के लिए घोषित सीट यदि रिक्त है तो वे रिक्त ही रहेगी। उन पर अन्य वर्गों के बालकों का प्रवेश नहीं होगा। विद्यालय को पाबन्द किया जाए कि आगामी सत्रों में प्रवेश के लिए निर्धारित सीट पर समय रहते व्यापक प्रचार-प्रसार कर विद्यालय द्वारा घोषित प्रवेश तिथि तक प्रवेश प्रक्रिया पूर्ण करें।

4. प्रवेश प्रक्रिया पूर्ण होने के बाद प्रवेश देना : यदि गैर सरकारी शिक्षण संस्थाएँ प्रवेश प्रक्रिया पूर्ण होने के बाद 25 प्रतिशत सीट के विरुद्ध प्रवेश देना चाहे तो ऐसा करना निजी विद्यालयों में अधिनियम के अनुसार विशेष प्रशिक्षण की व्यवस्था नहीं होने के कारण बालकों के शैक्षिक स्तर की दृष्टि से उचित नहीं होगा। इस प्रकार प्रवेश किए गए बालक अन्य छात्रों से शैक्षिक दृष्टि से पिछड़ जाएँगे तथा उनके ड्रॉप आउट होने की सम्भावना बढ़ जाएगी। अतः विद्यालयों को इस बात के लिए पाबन्द किया जावे कि नियमित प्रवेश के समय पूर्ण प्रयास कर 25 प्रतिशत सीट पर पात्र बालकों को ही प्रवेश दें।

उक्त दिशा-निर्देश सभी सम्बन्धित पक्षों को पालनार्थ प्रसारित किए जाते हैं। • ह., प्रमुख शासन सचिव, स्कूल एवं संस्कृत शिक्षा विभाग • कार्यालय निदेशक प्रारम्भिक शिक्षा राजस्थान, बीकानेर • क्रमांक : शिविरा/प्रारं/आर.टी.ई./वी.वे.अपडेशन/वी.सी./18861/11-12/77 दिनांक : 7.11.12

### 6. मूल पदस्थापन स्थान पर कार्य ग्रहण हेतु कार्यमुक्त किये जाने बाबत

• राजस्थान सरकार, शिक्षा (गुप-2) विभाग • क्रमांक : प.16(23)शिक्षा-2/1999 जयपुर, दिनांक : 27.9.2012 • विषय : मूल पदस्थापन स्थान पर कार्य ग्रहण हेतु कार्यमुक्त किये जाने बाबत। • इस विभाग के समसंख्यक आदेश/परिपत्र दिनांक 19.08.2009, 16.06.2010, 03.10.2011 एवं 14.06.2012 द्वारा शिक्षा विभाग के अधीन कार्यरत ऐसे

समस्त शैक्षणिक कार्मिक, जो शिक्षा विभाग के अतिरिक्त अन्य विभागों में कार्यव्यवस्थार्थ प्रतिनियुक्ति पर कार्यरत हैं, को उनके मूल पदस्थापन स्थान पर कार्यग्रहण हेतु कार्यमुक्त किये जाने के लिए निर्देशित किया गया था, किन्तु खेद का विषय है कि उक्त निर्देशों/आदेशों के बावजूद भी जिला कलेक्टर, उप खण्ड अधिकारी, तहसील, जिला परिषद एवं पंचायत समिति कार्यालयों में शिक्षकों को गैर शैक्षिक कार्यों हेतु कार्यव्यवस्थार्थ प्रतिनियुक्त किया हुआ है, जिसके फलस्वरूप विद्यालयों में शिक्षण/अध्यापन कार्य प्रभावित होने के साथ-साथ समाचार पत्रों में आये दिन विद्यालयों में तालाबन्दी के समाचार छप रहे हैं जिससे राज्य सरकार की छवि पर प्रतिकूल प्रभाव पड़ता है।

अतः पुनः समस्त अधिकारियों को निर्देशित किया जाता है कि— 1. जिला कलेक्टर उनके अधीन या उनके अधीनस्थ कार्यालयों में कार्यव्यवस्थार्थ पदस्थापित शिक्षकों को उनके मूल पदस्थापन स्थान हेतु तत्काल कार्यमुक्त करावें। 2. किसी भी शिक्षक को राज्य सरकार की अनुमति/सहमति के बिना किसी भी कार्यालय में कार्यव्यवस्थार्थ/प्रतिनियुक्ति पर नहीं लगाया जावे। राज्य सरकार की अनुमति के बिना किसी भी शिक्षक का कार्यव्यवस्थार्थ/प्रतिनियुक्ति पर लगाया जाता है तो सम्बन्धित अधिकारी, जिसके द्वारा शिक्षक को कार्यव्यवस्थार्थ लगाया जाता है, के विरुद्ध बिना किसी पूर्व सूचना/स्पष्टीकरण प्राप्त किये ही सी.सी.ए. नियमों में अनुशासनात्मक कार्यवाही अमल में लाई जावेगी। 3. शिक्षा विभाग के उन शिक्षा अधिकारियों के विरुद्ध भी सी.सी.ए. नियमों में अनुशासनात्मक कार्यवाही अमल में लाई जावेगी, जिनके द्वारा शिक्षकों को विभिन्न कार्यालयों में प्रतिनियुक्ति/कार्यव्यवस्था हेतु कार्यमुक्त किया जावेगा तथा यदि सम्बन्धित शिक्षक सीधे ही प्रतिनियुक्ति/कार्यव्यवस्थार्थ किसी कार्यालय में कार्यग्रहण करता है, तो सम्बन्धित अधिकारी ऐसे शिक्षक को तत्काल निलम्बित करने की कार्यवाही करेंगे। 4. विभाग के अधिकारियों को जिला कलेक्टर, उप खण्ड अधिकारी, तहसील, जिला परिषद, पंचायत समिति अथवा अन्य कार्यालयों से शिक्षकों की प्रतिनियुक्ति/कार्यव्यवस्था पर लगाने के आदेश प्राप्त होते हैं तो सम्बन्धित अधिकारी ऐसे आदेशों को सहमति/अनुमति हेतु इस विभाग को भिजवाते हुए पत्र की प्रति आदेश जारी करने वाले कार्यालय को प्रेषित करेंगे तथा जब तक राज्य सरकार की सहमति प्राप्त नहीं होती है तब तक ऐसे आदेशों की पालना नहीं की जावे।

उपरोक्त आदेशों/निर्देशों की कठोरता से पालना सुनिश्चित करें।

• ह., प्रमुख शासन सचिव, स्कूल एवं संस्कृत शिक्षा • कार्यालय निदेशक

प्रारम्भिक शिक्षा राजस्थान, बीकानेर • क्रमांक : शिविर/प्रारं/आर.टी.ई./विविध/18865/वो-1/11-12/158 दिनांक : 9.11.12

## 7. सूचना के अधिकार के तहत माननीय सूचना आयोग के निर्णयों की पालना सुनिश्चित करने बाबत

• राजस्थान सरकार, प्रारम्भिक शिक्षा विभाग • क्रमांक : प.17(27)प्राशि/10 जयपुर, दिनांक : 29.8.12 • विषय : सूचना के अधिकार के तहत माननीय सूचना आयोग के निर्णयों की पालना सुनिश्चित करने बाबत।  
• सन्दर्भ : प्रशासनिक सुधार विभाग (सूचना का अधिकार प्रकोष्ठ) का परिपत्र-7 प.7(1)प्र.सु./सूअप्र/2012 • उपर्युक्त विषयान्तर्गत एवं सन्दर्भ में निर्देशानुसार प्राप्त पत्र की छाया प्रति संलग्न प्रेषित है। इस सम्बन्ध में से अपेक्षा की जाती है कि आयोग के निर्णयों की पालना सुनिश्चित करें। साथ ही संलग्न प्रारूप में आयोग के निर्णयों की पंजिका का संधारण भी किया जावे जिसकी जाँच कभी भी की जा सकती है। • ह., शासन उप सचिव एवं राज्य लोक सूचना अधिकारी • कार्यालय निदेशक, माध्यमिक शिक्षा राजस्थान, बीकानेर • क्रमांक : शिविर-मा/सूअप्र/निर्देश/वोल-1/2011/75 दिनांक : 10.10.2012

## 8. राज्य सूचना आयोग द्वारा लिये गये निर्णय के पालनार्थ बाबत

• राजस्थान सरकार, प्रशासनिक सुधार विभाग (सूचना का अधिकार प्रकोष्ठ) • क्रमांक : 7प.7(1)प्र.सु./सूअप्र/2012 जयपुर, दिनांक 27.7.12  
• परिपत्र : राज्य सूचना आयोग द्वारा लिये गये निर्णय एक लम्बी प्रक्रिया का प्रतिफल होता है और आयोग के निर्णय की अनुपालना नहीं होने की स्थिति में आयोग के समक्ष परिवाद प्रस्तुत किये जाते हैं। अतः लोक प्राधिकरणों से यह अपेक्षा है कि आयोग द्वारा निर्णय पारित किये जाने के पश्चात् निर्णय की पालना यथा समय पर कर दी जावे। इस विषय में अधिनियम की धारा 19(7) में स्पष्ट उल्लेख है कि राज्य सूचना आयोग का विनिश्चय आबद्धकर (Binding) होगा।

अतः कृपया आपके विभाग के समस्त लोक सूचना अधिकारी/विभाग/विभागाध्यक्षों को निर्देशित करने का श्रम करें कि वे आयोग के निर्णयों की पालना सुनिश्चित करें। साथ ही संलग्न प्रारूप में आयोग के निर्णयों की पंजिका का संधारण भी करवाया जावे जिसकी जाँच कभी भी की जा सकती है। • ह., मुख्य सचिव, राजस्थान सरकार, जयपुर।

## PROFORMA - 8

### Register of Implementations of Decisions/Suggestions of Information Commission

Name of Public Authority : .....

S. No.	Reference No. from Information Commission	Date of Reference	Details of Decision	Action taken to implement Decision	Details of Compensation to be paid by Public Authority	Details of Compensation paid	Details of Penalties imposed	Details of Penalties Collected	Details of Disciplinary Actions Recommended by	Details of Disciplinary Action Taken	Suggestion of I.C.	Details of Action taken to Implement Suggestion	Other Significant/ Action taken	Any other information
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15



## स्मृति शेष

स्मरण बोर्दिया साहब का  
कीर्ति पुरुष के हस्ताक्षरों को निहारते हुए

□ भगवती प्रसाद गौतम

**मोबाइल एलार्म को जैसे पाला मार गया**  
है। क्षितिज-पार से होले-होले उभरती लालिमा  
फीकी-फीकी जान पड़ती है। समीप के ही  
'वेलकम टॉवर' पर डेने फड़फड़ाते परिन्दों की  
किलक-चिलक ने अजीब-सी मायूसी ओढ़ ली  
है। रोज-रोज उमगती-हुलसती भोर पर भी  
अनायास एक सन्नाटा पसर गया है। ऐसे में ही  
अखबार ने दस्तक दी है। एकाएक नजरें ठहर  
जाती हैं— 'शिक्षाकर्म अनिल बोर्दिया नहीं रहे'

यह क्या हुआ? ऐसा क्यों होता है कि बेहद ललक-लालसा के चलते भी जिसको कभी प्रत्यक्षतः देखा-सुना नहीं, उस व्यक्ति के प्रति इतनी श्रद्धा कैसे पनप जाती है! बस, ऐसे ही भीतर बहुत कुछ कौंध उठता है, और यह मन श्वेत-श्याम पाँखी-सा पीछे... बहुत पीछे की ओर उड़ान भरने लगता है।

मैं राजस्थान विश्वविद्यालय से सम्बद्ध दयानंद महाविद्यालय अजमेर के नियमित छात्र के रूप में वर्ष 1967 में एम.ए. फाइनल (चित्रकला) की परीक्षा में सम्मिलित हुआ परिणाम घोषित हुआ जून में। किसी विभागीय विज्ञप्ति का इंतजार किए बगैर ही साधारण कागज पर प्रार्थना पत्र लिखा और डाक से निदेशालय बीकानेर के लिए रवाना कर दिया। मगर आश्चर्य कि 24 जुलाई को ही एक लिफाफा प्राप्त हुआ, जिसमें था वरिष्ठ अध्यापक (अब व्याख्याता) चित्रकला के पद पर नियुक्ति आदेश दिनांक 21.7.1967 और वह भी जयपुर के पोद्दार बहुउद्देशीय उच्च माध्यमिक विद्यालय में। उस समय की व्यवस्थानुसार खुरदरे लाल-भूरे से कागज पर टंकित आदेश तो अंग्रेजी में, किन्तु नीचे अपर निदेशक की मुद्रा के साथ हस्ताक्षर 'अनिल बोर्दिया' हिन्दी में। बैठा-ठाला मन बल्लियों उछल पड़ा और 26 जुलाई को ही यथासमय मेरी उपस्थिति दर्ज हो गई राजस्थान की एक बड़ी संस्था में।

दो-तीन सप्ताह ही गुजरे होंगे एक  
अनभवी वरिष्ठ शिक्षक सोलंकी जी (संभवतः



**आपको सलाम, मेरा सबको राम-राम।**

नटवर सिंह) ने डाक से प्राप्त एक पोस्टकार्ड थमाया, जिसके जरिए मेयो कॉलेज के तत्कालीन प्रोफेसर एवं जाने-माने चित्रकार बी.सी. गुई ने बधाई व शुभकामनाएँ प्रेषित की थीं। उसे देखकर मुस्कराते हुए वे कहने लगे— “भैया, माफ करें, ‘लेटर हेड’ पर नजर पड़ी तो कुछ पंक्तियाँ पढ़ने में आ गई। इस शुरुआती दौर में ही जो ‘मेच्योरिटी’ आप में दिखाई देती है, उससे तो भविष्य काफी संभावनाओं-भरा लगता है। मगर एक बात कहूँ, पहली पोस्टिंग और वह भी राजधानी में? बस, थोड़ा सजग रहना. समय का

GOVERNMENT OF RAJASTHAN  
DEPARTMENT OF EDUCATION.

**C E R T I F I C A T E**

The following transfers and postings of Senior Teachers in Drawing & Painting are hereby made with immediate effect:-

S.No.	Name of Senior Teacher	From	To	Vizd.
1.	Sh. Dhawani M. Gitan.	Podder, W.P. HSS Jaipur.	HSS. Nathmal, Dwaras (Dist- pur) Nagar.	Perm., Deval.
2.	Sh. Doodnoyal Nagar.	HSS. Nathmal- Dwara (Dist- pur)	Podder W.P. Bhargava HSS Jaipur, P.O. Gerta pur)	

G/O - Anil Meena,  
Additional Director,  
Primary & Sec. Education,  
Jaipur, District.

No. HSS/JAIPUR/AB/GT/P/7026/Drawing/Section/87 Dt. 11.9.67

Copy forwarded to the following:-

1. Dy. Director of Education, Jaipur/District.
2. Superintendents of Schools, Jaipur/District.
3. A. Master, Govt. Tolmer, M.P.S.School, Jaipur.
4. Headmaster, Govt. S.B. School, Kathiyawa (District).
5. Sanitationary Officer, concerned.
6. Appointment Office.
7. Personnel File.

[Signature]  
Additional Director,  
Primary & Secondary Education,  
Jaipur, District.

YK/MS/11.9

कुछ पता नहीं, कब क्या हो जाए।” ...और सच में हुआ यही कि 18 अगस्त 1967 को जो स्थानान्तरण आदेश प्राप्त हुआ, उस पर भी बोर्दिया साहब के ही हस्ताक्षर !

वैसे मुझे न कोई अफसोस रहा, न कोई शिकायत। यह सब संभावित तो था ही, साथ ही न्यायोचित भी। दरअसल मेरे स्थान पर उपस्थित होने वाले बंधु उम्र और वरिष्ठता में बड़े थे और सेवानिवृत्ति के कगार पर भी... नाम दीनदयाल नागर। उन्होंने ही बताया कि “मैं ज्यों ही बोर्दिया साहब से बीकानेर जाकर मिला और याद दिलाया कि मुझसे वादा किया गया था, अन्तिम समय में जयपुर मिल जाएगा... तो उन्होंने कहा— कोई बात नहीं, ‘वह’ तो नया लड़का है। उसे थोड़ा घूमना चाहिए प्रांत में। आप आज ही शाम तक अपना आदेश ले जा सकते हैं।” इसी पारस्परिक स्थानान्तरण की अनुपालना में नागर साहब आये जयपुर और मैं चला 4 सितम्बर को जयपुर से नाथद्वारा - ठीक 41 दिन के ठहराव के बाद। मगर अब अपनी सेवानिवृत्ति के एक दशक बीत जाने के उपरान्त भी सोचता हूँ कि जीवनमूल्यों के निर्वाहक अनिल बोर्दिया का प्रशासनिक कौशल कितना चुस्त-दुरुस्थ था। कितना न्याय-संगत था उनका नजरिया और निर्णय।

आज पैंतालीस वर्ष से ज्यादा समय तक भी सहेजे गए उस कीर्ति पुरुष के हस्ताक्षरों को निहारते हुए यह आकलन करना आसान नहीं है कि उन्होंने किसको क्या दिया और किससे क्या लिया, किन्तु 2 सितम्बर 2012 को उनके अचानक चले जाने पर राष्ट्रीय शिक्षा और भारतीय समाज ने जो खोया, इधर जो जबरदस्त क्षति हुई, क्या कभी उसकी पूर्ति हो भी सकेगी?

याद आ रही हैं रह-रहकर कुछ पंक्तियाँ जो कहती हैं “अनिल बोर्दिया 1957 में भारतीय प्रशासनिक सेवा में आए और शिक्षा सचिव (केन्द्रीय मानव संसाधन मंत्रालय) के पद से सेवानिवृत्त हुए। लेकिन उनकी छवि शिक्षा और

सामाजिक सेवा के क्षेत्र में एक अधिकारी से अलग थी। वे इवान इलिच और पाउलो फरेरे जैसे शिक्षाकर्मियों के संगी रहे।” (जनसत्ता/ 4.9.12) उन्होंने भारतीय प्रशासनिक सेवा में रहते हुए अपर निदेशक/निदेशक (प्राथमिक एवं माध्यमिक शिक्षा), संयुक्त सचिव (केन्द्रीय शिक्षा मंत्रालय), महानिदेशक (प्रौढ़ शिक्षा कार्यक्रम), उपाध्यक्ष (शिक्षा संस्थान यूनेस्को), विकास आयुक्त (राजस्थान सरकार), सचिव (केन्द्रीय मानव संसाधन मंत्रालय) जैसे प्रतिष्ठा सम्पन्न पदों को सुशोभित किया, किन्तु वे बड़े ही सहज भाव से साध्य को साधते चलते रहे। सरकारी सेवा से मुक्त होने के उपरान्त भी वे शिक्षा व समाज के प्रति ही समर्पित रहे। ‘अनौपचारिका’ (सितम्बर-अक्टूबर, 2012) ने ‘अपनी बात’ को ‘आखा जीवन शिक्षा के नाम’ शीर्षक प्रदान करते हुए कहा— ‘वे भाई थे, बड़े भाई, सगे-सरीखे बड़े भाई। कभी उन्होंने कोई दूरी नहीं रखी। व्यवहार में बड़े भाई के नाते सारे धर्म भी निभाए। हर संकट में साथ खड़े रहे। ...भ्रातृत्व क्या होता है और मैत्री क्या होती है— इसे वे व्यवहार से जीवन भर सिखाते रहे।’

बोर्दिया साहब सच्चे अर्थों में सृजनहार थे— शिक्षा, शिक्षक व शिक्षार्थी के प्रति एकदम संवेदनशील। राष्ट्रीय शिक्षा आयोग के अध्यक्ष (1964-66) डॉ. डी.एस. कोठारी के प्रति उनके मन में खास सम्मान भाव रहा; उन्हें ‘शिक्षा का संत विज्ञानी’ माना और जीवन भर ‘भारतीय शिक्षा एवं विज्ञान के स्वप्नदर्शी शिल्पकार’ के रूप में पूजा। कोठारी साहब के बारे में वे लिखते हैं— “मुझ पर डॉक्टर साहब की तो विशेष अनुकम्पा थी ही, आयोग के सदस्य सचिव

स्व. जे.पी. नायक भी उन दिनों मेरे शैक्षिक व व्यावसायिक विकास की तरफ बहुत ध्यान देते थे।” इसी के साथ वे एक विशेष पीढ़ा भी व्यक्त कर जाते हैं— “हम लोग अभी तक गैर बराबरी वाली और अधिकांश बच्चों को घटिया किस्म की शिक्षा से उबार नहीं पाए हैं। ...वे (कोठारी सा.) जिस बात पर विशेष अफसोस करते थे, वह थी कॉमन स्कूल पद्धति का क्रियान्वयन न होना।” (जनसत्ता रविवारी, 10.9.2006)

आज से पाँच दशक पूर्व बोर्दिया जी ने ही राजस्थान में ‘शिविर पत्रिका’ और ‘नया शिक्षक’ (टीचर टुडे) की जो श्रेष्ठ शुरुआत की तथा शिक्षक रचनाकारों को शिक्षक दिवस प्रकाशनों के रूप में जो अनुकरणीय प्लेटफॉर्म उपलब्ध करवाया, वे आज भी जारी है। यही नहीं, प्रौढ़ शिक्षा, अनौपचारिक शिक्षा, महिला सामाख्या, राष्ट्रीय शिक्षा नीति, लोकजुंभिश, दूसरा दशक, शिक्षा का अधिकार जैसी सभी योजनाओं-कार्यक्रमों के क्रियान्वयन में भी उनकी आभामयी प्रतिछाया बरबस ही मुँह बोलती रही है।

एकाएक स्मरण हो आता है, जब पहली बार लोकजुंभिश प्रशिक्षण के अंतर्गत मुझे तिलोनिया जाने का अवसर मिला तो सुना कि बोर्दिया साहब भी आ रहे हैं। मगर वे नहीं आ सके तो बस मैं मन-मसोस कर रह गया। शिक्षाकर्मियों योजना के सिलसिले में मामोनी (बाराँ) की संस्था ‘संकल्प’ से भी मेरा जुड़ाव (1993-1998) रहा। एक बार समर्पित शिक्षानुरागी मोती भाई ने बताया कि बोर्दिया जी आगामी दौर में आने वाले हैं फील्ड सेंटर भंवरगढ़ में। आपको आना ही है।” मगर ‘डाइट’ बूंदी में सेवा पूर्व प्रशिक्षण की प्रवेश प्रक्रिया के चलते

उनके दर्शन लाभ का वह मौका भी हाथ से निकल गया। शायद इधर मेरे हिस्से में यही सब कुछ था।

स्वतंत्र पत्रकार शुभू पटवा के अनुसार अनिल बोर्दिया उन गिने-चुने लोगों में से एक थे, जो कभी उच्च अधिकारी की भूमिका में नजर आते, तो कभी एक कार्यकर्ता, एक सजग ‘एक्टिविस्ट’ के रूप में दिखाई देते। एक ओर विश्वविख्यात नेल्सन मंडेला के साथ उनकी करीबी थी, तो दूसरी ओर किसी गाँव में रहने वाली धापू दीदी उनकी बलाइयाँ लेती, खुलकर बतियाती दिखाई देती। ‘अनौपचारिका’ (सितम्बर-अक्टूबर, 2012)

वस्तुतः उनका समग्र कद इतना ऊँचा रहा कि उसके समक्ष अनगिनत सम्मान भी बौने नजर आते। फिर भी संयुक्त राष्ट्र संघ के प्रतिष्ठित ‘एविसेना सम्मान’ (1999), ‘गाँधी सेवा मेडल’ (2010) तथा भारत सरकार के ‘पद्मभूषण’ (2010) को कैसे नजरअंदाज किया जा सकता है। जाने-माने सर्जक एवं शिक्षाविद् शिवरतन थानवी ने ठीक ही कहा है— ‘प्रशासनिक अधिकारी होते हुए भी उन्होंने शिक्षा, शिक्षार्थी और शिक्षक की सेवा में पूरा जीवन अर्पित कर दिया। वे सच्चे शिक्षाकर्मों साबित हुए।’

बालकेन्द्रित शिक्षा और जनोन्मुखी नवाचारों के ऐसे प्रखर वक्ता, मूल्यपरक आचरण के प्रबल पक्षधर और असंख्य देशी-विदेशी प्रशंसकों के आदर्श रहे बोर्दिया जी को कोई भी सृजनशील सहकर्मों और सजग बुद्धिजीवी शायद ही कभी भुला सकेगा। उस अप्रतिम व्यक्तित्व एवं जुझारू शिक्षा मनीषी को आत्मिक नमन ! शत-शत नमन !

—1-त-8, अंजलि दादाबाड़ी, कोटा (राज.)

मो. 09461182571

### विद्यालय प्रसारण कार्यक्रम

माह : दिसम्बर, 2012

प्रसारण समय : दोपहर 2.40 से 3.00 तक

दिनांक	वार	आकाशवाणी केन्द्र	कक्षा	विषय	पाठ्यपुस्तक का नाम	पाठ क्रमांक	पाठ का नाम
1.12.2012	शनिवार	जयपुर		गैरपाठ्यक्रम			विश्व एड्स दिवस एवं विश्व एकता दिवस
3.12.2012	सोमवार	जोधपुर		गैरपाठ्यक्रम			विश्व विकलांग दिवस
4.12.2012	मंगलवार	उदयपुर	10	परीक्षामाला	हिन्दी		
5.12.2012	बुधवार	बीकानेर	10	परीक्षामाला	विज्ञान		
6.12.2012	गुरुवार	जयपुर	10	परीक्षामाला	अंग्रेजी		
7.12.2012	शुक्रवार	जोधपुर	10	परीक्षामाला	संस्कृत		
8.12.2012	शनिवार	उदयपुर	10	परीक्षामाला	गणित		
10.12.2012	सोमवार	बीकानेर		गैरपाठ्यक्रम			मानव अधिकार दिवस

## वैदिक सूत्र-6

(आनुरूप्ये) शून्यम् अन्यत्

अर्थ- अनुरूपता होने पर दूसरा चर शून्य होता है। (If one is in ratio, the other variable is zero.)

युगपत् सरल समीकरणों में  $x$  या  $y$  के गुणांकों का अनुपात, अचर पदों के अनुपात के समान हो, तो दूसरा चर शून्य होगा।

$$\text{उदाहरण (i)- } 12x + 8y = 7 \\ 16x + 16y = 14$$

यहाँ  $\frac{8}{16} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$  अर्थात्  $y$  के गुणांकों का अनुपात, अचर पदों के अनुपात के समान है अतः इस वैदिक सूत्र से  $x = 0$ , तब  $y = \frac{7}{8}$ .

उदाहरण (ii)-

$$499x + 172y = 212 \\ 9779x + 387y = 477$$

$$\text{यहाँ } \frac{172}{387} = \frac{43 \times 4}{43 \times 9} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{212}{477} = \frac{53 \times 4}{53 \times 9} = \frac{4}{9}$$

अर्थात्  $y$  के गुणांकों का अनुपात, अचर पदों के अनुपात के समान है अतः इस वैदिक सूत्र से  $x = 0$ , तब  $y = \frac{212}{172} = \frac{53}{43}$

उदाहरण (iii)-

$$2x + 3y - 4z = 4 \\ 3x + y + 2z = 6 \\ 5x + 4y + 3z = 10$$

यहाँ  $2 : 3 : 5 = 4 : 6 : 10$ , अतः इस वैदिक सूत्र से  $y = z = 0$ , तब  $x = 2$

इस प्रकार इस वैदिक सूत्र से तीन चर राशियों की समीकरणों का हल सुगमता से प्राप्त किया जा सकता है।

## वैदिक सूत्र-7

संकलन व्यकलनाभ्याम्।

अर्थ- जोड़कर तथा घटाकर।

## चौथी कड़ी

## वैदिक गणित का ज्ञान

□ डॉ. के.डी. शर्मा

(By Addition and Subtraction)

(क) यदि युगपत् समीकरणों में  $x$  तथा  $y$  के गुणांक परस्पर बदले हों तो योग तथा अन्तर से  $x+y$  तथा  $x-y$  के रूप में समीकरणें प्राप्त होंगी।

$$\text{उदाहरण- } 45x - 23y = 113 \\ 23x - 45y = 91$$

$$\text{योग से, } 68x - 68y = 204$$

$$\text{या } x - y = 3 \dots\dots(i)$$

$$\text{घटाने पर } 22x + 22y = 22$$

$$\text{या } x + y = 1 \dots\dots(ii)$$

$$(i) \text{ तथा } (ii) \text{ से } x = 2, y = -1$$

(ख) H.C.F. ज्ञात करना

वैदिक सूत्र 7 से बीजगणितीय पदों का सुगमता से H.C.F. ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण (i)-  $x^2 + 7x + 6$  तथा  $x^2 - 5x - 6$  का H.C.F. ज्ञात करना।



गणित के निष्णात प्रोफेसर डॉ. के.डी. शर्मा महाविद्यालय शिक्षा में प्राचार्य पद से सेवानिवृत्त हुए हैं। आप सतत अध्ययनसाथी एवं कुशल लेखक हैं। आप गणित के आधिकारिक विद्वान के रूप में प्रतिष्ठित हैं। राज्य सेवा से निवृत्ति के उपरान्त वरिष्ठ नागरिकों के माध्यम से समाज सेवा एवं नागरिक चेतना का संचरण करने हेतु सतत् प्रयत्नशील डॉ. शर्मा शिक्षा, विशेषकर बालिका शिक्षा में गहरी रुचि रखते हैं। धर्म और अध्यात्म में वैज्ञानिकता के समन्वय पर सदैव बल देने वाले डॉ. शर्मा श्री हरिश्चन्द्र माधुर लोक प्रशासन संस्थान, क्षेत्रीय कार्यालय, बीकानेर में विजिटिंग प्रोफेसर रहे हैं।

$$\text{जोड़ने पर } x^2 + 7x + 6 \\ x^2 - 5x - 6 \\ \hline 2x^2 + 2x \\ 2x(x+1)$$

$$\text{घटाने पर } x^2 + 7x + 6 \\ x^2 - 5x - 6 \\ \hline 12x + 12 \\ 12(x+1)$$

$$\text{अतः H.C.F.} = (x+1)$$

उदाहरण (ii)-  $4x^3 + 13x^2 + 19x + 4$  तथा  $2x^3 + 5x^2 + 5x - 4$  का H.C.F. ज्ञात करना।

$$4x^3 + 13x^2 + 19x + 4 \\ 2x^3 + 5x^2 + 5x - 4 \\ \hline$$

$$\text{योग करने पर } 6x^3 + 18x^2 + 24x \\ = 6x(x^2 + 3x + 4)$$

$$\text{घटाने पर } x^3 \text{ का विलोपन करने के लिए} \\ \text{द्वितीय पद का दुगुणा करके प्रथम पद में से} \\ 4x^3 + 13x^2 + 19x + 4 \\ 4x^3 + 10x^2 + 10x - 8 \\ \hline 3x^2 + 9x + 12 \\ = 3(x^2 + 3x + 4)$$

$$\text{अतः H.C.F.} = x^2 + 3x + 4$$

प्रचलन विधि में पदों के गुणनखण्ड किये जाते हैं परन्तु त्रिघात पदों के गुणनखण्ड कठिनता से होते हैं। वैदिक विधि द्वारा मौखिक रूप से H.C.F. ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण (iii)-

$$6x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 14x + 7$$

तथा  $3x^3 - 5x^2 + 7$  का H.C.F. ज्ञात करना।

द्वितीय पद को  $2x$  का गुणा करके प्रथम पद में से घटाते हैं।

$$\begin{array}{r} 6x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 14x + 7 \\ 6x^4 - 10x^3 \quad + 14x \\ \hline 3x^3 - 5x^2 + 7 \end{array}$$

द्वितीय पद भी यही है।

$$\text{अतः H.C.F.} = 3x^3 - 5x^2 + 7$$

चतुर्थ घात पदों तथा तृतीय घात पदों के गुणनखण्ड कठिनता से होते हैं अतः H.C.F. ज्ञात करने की प्रचलित विधि कठिन है जबकि वैदिक विधि अति सुगम है।

सूत्र-7 का उपसूत्र है-

यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्गं च योजयेत्।

अर्थ- जितना कम उतना और कम कर, उसके वर्ग का उपयोग करें।

इस उपसूत्र के उपयोग से संख्याओं के वर्ग सुगमता से प्राप्त होते हैं।

उदाहरण (i)-  $7^2$  ज्ञात करना है।

आधार 10 लेते हैं। आधार 10 से 7, 3 कम है अतः 7 में से 3 कम करते हैं तथा 3 का वर्ग करते हैं अतः उपसूत्र से

$$7^2 = (7-3)/3^2 = 4/9 = 49$$

उदाहरण (ii)-

$$93^2 = (93-7)/7^2 = 86/49 = 8649$$

( $\because$  93, 100 से 7 कम है)

उदाहरण (iii)-

$$\begin{aligned} 86^2 &= (86-14)/14^2 = 72/196 \\ &= 72/196 = 73/96 = 7396 \end{aligned}$$

यहाँ आधार 100 लिया।

उदाहरण (iv)-

$$\begin{aligned} 29^2 &= (29-1) \times 3/1^2 \\ &= 84/1 = 841 \end{aligned}$$

यहाँ आधार 30 लिया, 29, 30 से 1 कम है। चूँकि 30, 10 का तिगुना है अतः  $(29-1) \times 3$  किया।

उदाहरण (v)-

$$\begin{aligned} 775^2 &= (775-25) \times 8/25^2, \\ &\text{आधार} = 800 \\ &= (750 \times 8)/625 = 6000/625 \\ &= 6006/25 = 600625 \end{aligned}$$

( $\because$  आधार 800 =  $100 \times 8$  अतः  $(775-25) \times 8$  किया।)

उदाहरण (vi)-

$$\begin{aligned} 989^2 &= (989-11)/11^2 \\ &= 978/121 = 978121 \end{aligned}$$

यहाँ आधार 1000 लिया।

**वैदिक सूत्र-8**

पूरणापूरणाभ्याम्।

अर्थ- पूर्ण या अपूर्ण वर्ग, घात 3 या घात 4 इत्यादि।

उदाहरण (i)- समीकरण

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \text{ को हल करना है।}$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \dots\dots\dots(i)$$

$$\text{परन्तु } (x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \dots\dots\dots(ii)$$

(i) से  $x^3 - 6x^2 = -11x + 6$ , (ii) में रखने पर  $(x-2)^3 = -11x + 6 + 12x - 8 = x - 2$

$$\text{माना } x-2 = y$$

$$\text{तब } y^3 = y \text{ या } y^3 - y = 0,$$

$$\text{या } y(y-1)(y+1) = 0 \text{ (iii)}$$

$$\text{अतः } y = 0 \text{ या } \pm 1 \text{ परन्तु } x-2 = y$$

$$\text{अतः } x = 2, 3, 1$$

समीकरण (iii) में  $y=x-2$  रखने पर (i) के बाँयें पद के गुणनखण्ड प्राप्त हो जाते हैं अर्थात्

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-2)(x-3)(x-1)$$

उदाहरण (ii)- समीकरण

$$x^4 + 16x^3 + 86x^2 + 176x + 105 = 0 \text{ को हल करना है।}$$

$$x^4 + 16x^3 + 86x^2 + 176x + 105 = 0 \dots\dots(i)$$

$$\text{या } x^4 + 16x^3 = -86x^2 - 176x - 105 \dots\dots(ii)$$

परन्तु

$$(x+4)^4 = x^4 + 16x^3 + 96x^2 + 256x + 256$$

$$= -86x^2 - 176x - 105 + 96x^2 + 256x + 256 \quad [(ii) \text{ से}]$$

$$= 10x^2 + 80x + 151$$

$$= 10x^2 + 80x + 160 - 9$$

$$= 10(x^2 + 8x + 16) - 9$$

$$\text{अतः } (x+4)^4 = 10(x+4)^2 - 9$$

$$\text{माना } x+4 = y$$

$$\text{तब } y^4 - 10y^2 + 9 = 0, \text{ या } (y^2 - 9)(y^2 - 1) = 0$$

$$\text{या } (y+3)(y-3)(y+1)(y-1) = 0$$

$$y = x+4, \text{ रखने पर}$$

$$(x+7)(x+1)(x+5)(x+3) = 0 \dots\dots\dots(iii)$$

$$\text{अतः } x = -7, -1, -5, -3$$

(iii) से (i) के बाँयें पद के गुणनखण्ड प्राप्त होते हैं, अर्थात्

$$x^4 + 16x^3 + 86x^2 + 176x + 105$$

$$= (x+7)(x+1)(x+5)(x+3)$$

वर्तमान में गणित के प्रचलन विधियों से तृतीय घात तथा चतुर्थ घात के पदों के गुणनखण्ड और इन्हीं घातों के पदों की समीकरणों का हल कठिनता से प्राप्त होता है, जबकि वैदिक विधि बहुत सुगम है अतः गणित के आठवीं, नवमी तथा दसवीं कक्षाओं के विद्यार्थियों को वैदिक गणित की विधियाँ समझानी चाहिए।

**वैदिक सूत्र-9**

चलनकलनाभ्याम्।

अर्थ- चलन-कलन की क्रियाओं के द्वारा।

यह सूत्र अवकलन (Differential Calculus) तथा समाकलन (Integral Calculus) में बहुत उपयोगी है।

उदाहरण (i)-  $x^5 e^{2x}$  का प्रथम, द्वितीय तथा तृतीय अवकलन ज्ञात करना।

प्रथम अवकलन :

$$\begin{array}{l} x^5 \searrow 5x^4, \left( \frac{d}{dx} x^5 = 5x^4 \right) \\ e^{2x} \nearrow 2e^{2x}, \left( \frac{d}{dx} e^{2x} = 2e^{2x} \right) \end{array}$$

$$\text{अतः } \left( \frac{d}{dx} x^5 e^{2x} \right) = x^5 (2e^{2x}) + 5x^4 (e^{2x})$$

$$= 2x^5 e^{2x} + 5x^4 e^{2x}$$

द्वितीय अवकलन :

$$\begin{array}{c} x^5 \\ 5x^4, 20x^3, \\ e^{2x} \end{array} \left[ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} x^5 = 5x^4 \\ \frac{d}{dx} (5x^4) = 20x^3 \\ \frac{d}{dx} e^{2x} = 2e^{2x} \\ \frac{d}{dx} (2e^{2x}) = 4e^{2x} \end{array} \right]$$

अतः

$$\frac{d^2}{dx^2} (x^5 e^{2x}) = x^5 (8e^{2x}) + 3(5x^4)(4e^{2x}) + 2(20x^3)(2e^{2x}) + 20x^3(e^{2x})$$

$$= 4x^5 e^{2x} + 20x^4 e^{2x} + 20x^3 e^{2x}$$

इसी प्रकार तृतीय अवकलन ज्ञात किया जा सकता है।

$$\frac{d^3}{dx^3} (x^5 e^{2x}) = x^5 (8e^{2x}) + 3(5x^4)(4e^{2x}) + 3(20x^3)(2e^{2x}) + (60x^2)e^{2x}$$

$$= 8x^5 e^{2x} + 60x^4 e^{2x} + 120x^3 e^{2x} + 60x^2 e^{2x}$$

उदाहरण (ii) —  $\int x^5 e^x dx$  ज्ञात करना।

वैदिक विधि में  $x^5$  का अवकलन तब तक करते हैं जब तक अवकलन शून्य न हो जाए तथा  $e^x$  का उतनी ही बार समाकलन करते हैं।

$$\int x^5 e^x dx = x^5 e^x - 5x^4 e^x + 20x^3 e^x - 60x^2 e^x + 120x e^x - 120 e^x + c$$

नोट : सम-स्थान के पदों (प्रथम स्तम्भ)

में minus (-) चिह्न लेते हैं।

उदाहरण (iii) —  $\int x^2 \sin x dx$

$$\int x^2 \sin x dx = x^2 (-\cos x) - 2x (-\sin x) + 2 \cos x + c$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$$

नोट : सम-स्थान के पदों (प्रथम स्तम्भ) में minus (-) चिह्न लेते हैं।

वैदिक सूत्र-10

यावदूनम्।

अर्थ— जितना कम है। (The Deficiency)

इस वैदिक सूत्र से संख्याओं के वर्ग (Square) तथा घन (Cube) प्राप्त कर सकते हैं।

उदाहरण—(1)

(i)  $(96)^2 = (96-4)/4^2 = 92/16 = 9216$

( $\because 96, 100$  से 4 कम है अतः  $96-4$  लेते हैं)

(ii)  $(87)^2 = (87-13)/(13)^2 = 74/169 = 74/169 = 7569$

( $\because 87, 100$  से 13 कम है अतः  $87-13$  लेते हैं)

(iii)  $(996)^2 = (996-4)/4^2 = 992/16 = 992016$

( $\because (996)^2$  में अंकों की संख्या 6 है अतः 016 लेते हैं। यहाँ आधार 1000 लिया है।)

उदाहरण (2)

(i)  $(103)^3$

विधि— यहाँ आधार 100 लेते हैं। 103, 100 से 3 अधिक है। सूत्र से 3 का दुगुणा अर्थात् 6, 103 में जोड़ देते हैं, योगफल 109 प्राप्त होते हैं। 109, आधार 100 से 9 अधिक है तथा 103, 100 से 3 अधिक है। 9 तथा 3 का गुणा अर्थात् 27 लेते हैं तथा  $(03)^3 = 27$  प्राप्त करते हैं अतः

$$(103)^3 = (103+3 \times 2)/9 \times 3/3^3 = 109/27/27 = 1092727$$

(ii)  $(113)^3 = (113+13 \times 2)/(39 \times 13)/13^3 = 139/507/2197 = 139/507/2197 = 1442897$

(iii)  $(93)^3$

आधार 100 लेते हैं, 93, 100 से 7 कम है, सूत्र से, 7 का दुगुणा अर्थात् 14, 93

से घटाने पर 79 प्राप्त करते हैं। 79, आधार 100 से 21 कम है तथा 93, 100 से 7 कम है, इन दोनों का गुणा  $(-21)(-7) = (147)$  प्राप्त करते हैं तथा  $(-7)^3 = -343$  लेते हैं अतः

$$(93)^3 = 79/147/(-343)$$

$$= 79/147/_{-3} \bar{4} \bar{3}$$

$$= 80/44/_{-4} \bar{3}$$

$$= 80/44/_{-1} 57$$

$$= 80/43/57$$

$$= 804357$$

( $\because \bar{4} \bar{3} = -100+57$  अतः -1 हासिल)

(iv)  $(996)^3 = (996-4 \times 2)/(048/(-4)^3 = 988/048/_{-6} \bar{4} = 988/048/_{-1} 936 = 988/047/936 = 988047936$

यहाँ आधार 1000 है। 996, 1000 से 4 कम है। सूत्र से  $4 \times 2 = 8$ , 1000 में से घटाने पर 988 प्राप्त करते हैं जो 1000 से 12 कम है,  $12 \times 4 = 048$  लेते हैं।

$$\bar{0} \bar{6} \bar{4} = 1000 - 064 = 936, \text{ हासिल } -1$$

वैदिक सूत्र-11

व्यष्टिसमष्टिः।

अर्थ— एक को पूर्ण और पूर्ण को एक मानते हुए। (Whole as one and one as whole)

इस सूत्र द्वारा चतुर्थ घात के द्विपदों का औसत (मध्य द्विपद) का उपयोग कर सरल द्विघात पदों में व्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरण— समीकरण  $(x+7)^4 + (x+5)^4 = 706$ , हल करना है। द्विपद  $(x+7)$  तथा  $(x+5)$  का औसत द्विपद होगा—

$$\frac{1}{2} (x+7+x+5) = x+6$$

माना  $x+6=a$ , तब  $x+7=a+1$ ,  $x+5=a-1$

समीकरण में मान रखने पर

$$(a+1)^4 + (a-1)^4 = 706$$

a के विषम घात पद कैंसिल हो जाएँगे

$$\text{अतः } 2a^4 + 12a^2 + 2 = 706$$

$$\text{या } a^4 + 6a^2 - 352 = 0$$

$$\text{या } (a^2 + 22)(a^2 - 16) = 0$$

$$\text{अतः } a^2 = -22 \text{ या } a^2 = 16$$

$$\therefore a = \pm\sqrt{-22} \text{ या } a = \pm 4$$

$$\text{चूँकि } x+6 = a,$$

$$\text{अतः } x = \pm\sqrt{-22} - 6,$$

$$\text{या } -2, \text{ या } -10$$

चूँकि समीकरण चतुर्थ घातीय है अतः इसके चार ही मूल होंगे।

### वैदिक सूत्र-12

शेषाण्यङ्केन चरमेण।

अर्थ- अवशेष को अंतिम अंक द्वारा (गुणा)।

इस सूत्र द्वारा मूल भिन्न से आवर्ती दशमलव भिन्न प्राप्त कर सकते हैं।

उदाहरण-  $\frac{1}{7}$  की आवर्ती दशमलव भिन्न प्राप्त करना  $\frac{1}{7}$  के प्रकरण में अवशेष क्रमशः

326451 (7 का भाग 1.000000 में देने पर शेषफल) प्राप्त होते हैं।

चूँकि  $\frac{1}{7}$  को आवर्ती दशमलव भिन्न में बदलने पर अंतिम अंक 7 होगा अतः प्रत्येक

अवशेष को 7 से गुणा करते हैं अतः अवशेष

$$3 \quad 2 \quad 6 \quad 4 \quad 5 \quad 1 \quad ] \times 7 \dots\dots(i)$$

$$21 \quad 14 \quad 42 \quad 28 \quad 35 \quad 7 \quad \dots\dots(ii)$$

$$2^1 \quad 1^4 \quad 2^2 \quad 8^2 \quad 5^7 \quad \dots\dots(iii)$$

(i) के प्रत्येक अंक 7 से गुणा करने पर (ii) प्राप्त हुए। (ii) के प्रत्येक अंक का इकाई का अंक लेते हैं तथा (iii) की तरह लिखते हैं।

अतः

$$\frac{1}{7} = .142857$$

### वैदिक सूत्र-13

सोपान्त्यद्वयमन्थम्।

अर्थ- अंतिम और उपान्ति का दुगुणा। (Ultimate and twice the penultimate)

इस सूत्र के अनुसार अन्तिम L तथा

उपान्ति P का दुगुणा अर्थात्  $L+2P = 0$  से समीकरण का तुरन्त हल प्राप्त होता है।

उदाहरण-

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)}$$

$$= \frac{1}{(x+2)(x+5)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)},$$

हल करना है।

$$\text{यहाँ } L = x+5, \quad P = x+4$$

$$\text{सूत्र से } L+2P = 0$$

$$\text{अतः } (x+5) + 2(x+4) = 0$$

$$\text{या } 3x+13 = 0$$

$$\text{अतः } x = -\frac{13}{3}$$

इस सूत्र से निम्नलिखित रूप की द्विघात समीकरण हल की जा सकती है।

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{BC},$$

जहाँ एक घातीय पद A, B, C, D समान्तर श्रेणी (A.P.) में है।

### वैदिक सूत्र-14

एकन्यूने पूर्वणे।

अर्थ- पहिले से एक कम के द्वारा। (By one less than the previous one)

यह सूत्र प्रथम वैदिक सूत्र “एकाधिकेन पूर्वेण” का एक प्रकार से विलोम है। ऐसी संख्याएँ जिनमें प्रत्येक अंक 9 हो, का किसी अन्य संख्या से गुणा करने में इस सूत्र का उपयोग होता है।

उदाहरण- (1)

$$54 \times 99 = 53/46 = 5346$$

विधि- सूत्र के अनुसार 54 का एक न्यून  $54-1 = 53$  तथा 54 का “निखिल” से दायों भाग  $= 100-54 = 46$  ( $\therefore 99$  से गुणा करना है अतः 100 में से 54 घटाएँ)

उदाहरण- (2)

$$37 \times 999 = 36/963 = 36963$$

सूत्र के अनुसार 37 का एक न्यून  $= 37-1 = 36$ , तथा 37 का “निखिल” से दायों भाग  $= 1000-37 = 963$  ( $\therefore 999$  से गुणा करना है, अतः 1000 से 37 घटाया)

### वैदिक सूत्र-15

गुणितसमुच्चयः।

अर्थ- गुणितों का समुच्चय।

इस सूत्र के अनुसार किसी भी बीजगणितीय व्यंजक के गुणांकों का योग, उस व्यंजक के गुणनखण्डों के गुणांकों के योग का गुणनफल होगा।

उदाहरण- (1)

$$x^2+16x+63 = (x+7)(x+9)$$

$$\text{बाँयें ओर के व्यंजक के गुणांकों का योग} \\ = 1+16+63 = 80$$

$$\text{दाँयें ओर गुणनखण्डों के गुणांकों के योग} \\ \text{का गुणनफल} = (1+7) \times (1+9) = 8 \times 10 = 80$$

उदाहरण- (2)

$$x^3+6x^2+11x+6 = (x+1)(x+2)(x+3)$$

$$\text{तब } 1+6+11+6 = (1+1)(1+2)(1+3) \\ = 2 \times 3 \times 4$$

$$\text{या } 24 = 24$$

### वैदिक सूत्र-16

गुणकसमुच्चयः।

अर्थ- गुणकों का समुच्चय। (Collectivity of multipliers)

इस सूत्र की सहायता से बीजगणितीय व्यंजकों के अवकल गुणांक (सभी कोटि के) (Differential coefficients of all orders) प्राप्त किये जा सकते हैं।

(i) यदि व्यंजक द्विघात का है तो उसके एक घातीय दो गुणनखण्ड होंगे। व्यंजक का प्रथम अवकल गुणांक, दोनों गुणनखण्डों के योग के बराबर होगा।

$$\text{उदाहरण- (1)} \quad x^2 + 3x + 2$$

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$$

$$\therefore D_1 \text{ (First differential)} =$$

$$(x+1) + (x+2) = 2x+3$$



(ii) यदि व्यंजक तीन घातीय हो तब निम्न उदाहरण द्वारा  $D_1$  तथा  $D_2$  प्राप्त करते हैं।

$$\begin{aligned} \text{उदाहरण- (2)} \quad x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \\ x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+1)(x+2)(x+3) \\ D_1 = (x+1)(x+2) + (x+2)(x+3) + \\ (x+3)(x+1) \\ = (x^2 + 3x + 2) + (x^2 + 5x + 6) + \\ (x^2 + 4x + 3) \\ = 3x^2 + 12x + 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 = \frac{1}{2} [(x+1) + (x+2) + (x+3)] \\ = 2(3x+6) = 6x+12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{उदाहरण- (3)} \\ x^5 + 15x^4 + 85x^3 + 225x^2 + 274x + 120 \\ \text{इस व्यंजक के गुणखण्ड} = \\ (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) \\ D_1 = \Sigma (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) \\ = 5x^4 + 60x^3 + 255x^2 + \\ 450x + 274 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 = \frac{1}{2} \Sigma (x+1)(x+2)(x+3) \\ = 20x^3 + 180x^2 + 510x + 450 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3 = \frac{1}{3} \Sigma (x+1)(x+2) \\ = 60x^2 + 360x + 510 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_4 = \frac{1}{4} \Sigma (x+1) \\ = 24[(x+1) + (x+2) + (x+3) + \\ (x+4) + (x+5)] \\ = 24(5x+15) \end{aligned}$$

$$\text{अतः } D_4 = 120x + 360$$

**वैदिक गणित की उपादेयता**— वैदिक गणित अधिकांश प्रश्नों का उत्तर एक पंक्ति में देने में सक्षम है। इसकी विधियाँ सहज, सरस, शीघ्र-ग्राह्य एवं द्रुतगामी है। वैदिक गणित संक्षिप्तीकरण एवं सरलीकरण संक्रियाओं का मार्ग प्रशस्त करता है।

वैदिक गणित में योग तथा व्यवकलन दो ही क्रियाएँ हैं। यदि वैदिक गणित तथा प्रचलित गणित दोनों का समन्वय स्थापित कर लिया जाए तो गणित के विद्यार्थियों को बहुत लाभ होगा। वैदिक गणित में परिणामों की अनेक जाँच विधियाँ हैं, अतः उत्तरमाला की आवश्यकता नहीं पड़ती।

वैदिक गणित में प्रक्रियाओं को सम्पन्न करने की विधियों की विविधता होने के कारण अपने अनुकूल विधि चुनने की सुविधा है। वैदिक सूत्रों में इतनी शक्ति निहित है कि इनसे नई

विधियाँ भी खोजी जा सकती हैं।

वैदिक गणित मौलिक चिन्तन तथा तर्कशक्ति का विकास करती है एवं एकाग्रता में वृद्धि करती है। वैदिक गणित में अधिकांश क्रियाएँ मौखिक ही सम्पन्न होती हैं तथा कम समय में अधिक कार्य सम्पन्न होने की क्षमता निहित है।

भारतीय संस्कृति के आधार वेद हैं। वैदिक गणित विद्यार्थियों में वेदों के प्रति आस्था तथा आध्यात्मिकता के प्रति निष्ठा उत्पन्न करती है। वैदिक गणित संस्कृति के विकास की गति में वृद्धि करती है। वैदिक गणित के अध्ययन से हमारे सांस्कृतिक वर्चस्व में वृद्धि होती है।

**संयुक्त राष्ट्र संघ की संस्था UNESCO** ने हमारे ऋग्वेद को विश्व का प्राचीनतम ग्रंथ माना है तथा इसकी कई प्रतियाँ मानव धरोहर के रूप में संरक्षित की हैं। ऋग्वेद की ऋचाओं में संख्याओं का प्रयोग दशमिक प्रणाली के आधार पर हुआ है। शून्य का आविष्कार हमारे वेदों की देन है संख्याओं का ज्ञान भी भारतीयों की देन है तथा भारत से यह ज्ञान अरब देशों में गया तथा वहाँ से पश्चिमी देशों को संख्याओं का ज्ञान प्राप्त हुआ। अतः भारतीय वैदिक गणित का विश्व में गौरवपूर्ण इतिहास रहा है।

—सेवानिवृत्त प्राचार्य, कॉलेज शिक्षा

IV-D-86, जयनारायण व्यास कॉलोनी, बीकानेर

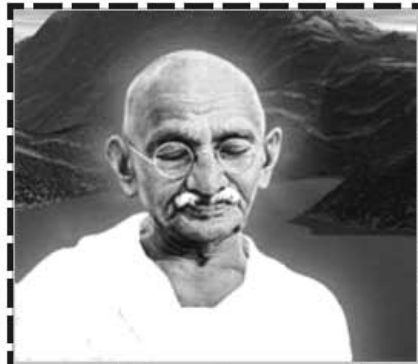
## शिविर पंचांग माह दिसम्बर, 2012

**कार्य दिवस 20 • रविवार 05 • अवकाश 06 • उत्सव 02 • 1 दिसम्बर**— विश्व एड्स दिवस एवं विश्व एकता दिवस (उत्सव)।  
**1-2 दिसम्बर**— विशेष आवश्यकता वाले विद्यार्थियों की जिला स्तरीय खेलकूद प्रतियोगिता। **1-10 दिसम्बर**— ग्राम स्तर पर शैक्षिक योजना निर्माण हेतु कार्यशाला का आयोजन (प्रारम्भिक)। **03 दिसम्बर**— विश्व विकलांगता दिवस का आयोजन (समावेशित शिक्षा के उन्नयन हेतु)। **10 दिसम्बर**— मानव अधिकार दिवस (उत्सव)। **12-24 दिसम्बर**— अर्द्धवार्षिक परीक्षा (सभी कक्षाओं के लिए)। **13-14 दिसम्बर**— राज्य स्तरीय मंत्रालयिक कर्मचारी खेलकूद प्रतियोगिता हेतु जिला स्तर पर चयन। **14-21 दिसम्बर**— राष्ट्रीय ऊर्जा संरक्षण सप्ताह का आयोजन। **18-19 दिसम्बर**— राज्य स्तरीय मंत्रालयिक कर्मचारी खेलकूद प्रतियोगिता हेतु मण्डल स्तर पर चयन एवं दल गठन। **19 दिसम्बर**— भामाशाह योजना का अर्द्धवार्षिक प्रगति प्रतिवेदन निदेशक, प्रारम्भिक शिक्षा, राजस्थान, बीकानेर को प्रेषित करना। **21-25 दिसम्बर**— राज्य स्तरीय मंत्रालयिक कर्मचारी खेलकूद प्रतियोगिता हेतु मण्डल स्तर पर प्रशिक्षण शिविर। **25-26 दिसम्बर**— राज्य स्तरीय शिक्षक खेलकूद प्रतियोगिता हेतु प्रशिक्षण शिविरों का आयोजन। **25-31 दिसम्बर**— शीतकालीन अवकाश (25 दिसम्बर को क्रिसमस अवकाश सहित) नव नियुक्त शिक्षकों हेतु प्रशिक्षणों का आयोजन। राज्य कर्मचारियों के हितकारी निधि के वार्षिक अंशदान को दिसम्बर के वेतन से निर्धारित दर पर कटौती की कार्यवाही करना। **27-29 दिसम्बर**— राज्य स्तरीय शिक्षक खेलकूद प्रतियोगिता। **27-30 दिसम्बर**— राज्य स्तरीय मंत्रालयिक कर्मचारी खेलकूद प्रतियोगिता का आयोजन, विशेष आवश्यकता वाले बालक-बालिकाओं को अंग-उपकरण का वितरण।  
**नोट** :- माह में कम्प्यूटर प्रशिक्षण एवं विषय आधारित 3 दिवसीय प्रशिक्षण आयोजित किये जायेंगे, प्रधानाध्यापक प्रशिक्षण (उप्रावि)।

## बापू की सीख-18

### शरीर

□ मो. क. गाँधी



महात्मा गाँधी का व्यक्तित्व बहुआयामी था। राजनीति, अर्थनीति, समाजनीति एवं शिक्षा सभी क्षेत्रों में उनके विचार बहुत उपयोगी हैं। वस्तुतः वे एक मनोवैज्ञानिक शिक्षक थे। उनकी शिक्षा सम्बन्धी 21 रचनाएं 'बापू की सीख' नामक पुस्तक में प्रकाशित हुई हैं। शिविरा के सुधि पाठकों के लिए उन्हें मृच्छलाबद्ध प्रकाशित किए जाने का निर्णय लिया गया है। आशा है पाठक इन विचारों को पठन, मनन के साथ आचरण में लाने का प्रयास करेंगे। —वरिष्ठ सम्पादक

शरीर की जानकारी के पहले हमें आरोग्य का अर्थ जान लेना चाहिए। आरोग्य का मतलब है तंदुरुस्ती। जिसका शरीर व्याधि-रहित है, साधारण काम करने योग्य है, अर्थात् जो बिना थके रोज दस-बारह मील चल सकता है, साधारण खुराक पचा सकता है, जिसकी इंद्रियाँ और मन सजीव है, वह तंदुरुस्त कहा जाएगा। मेरा मतलब पहलवान शरीर या बहुत दौड़ने-कूदने की ताकत से नहीं है। ऐसी असाधारण शक्ति प्रकट करने वाले रोग-ग्रस्त हो सकते हैं। ऐसे शारीरिक विकास को एकांगी कहेंगे।

जिस तरह के आरोग्य की बात कही गई है, उसके लिए शरीर का कुछ ज्ञान आवश्यक है।

राम जानें पहले शिक्षा का क्या रूप था। इतिहासज्ञ कुछ जानते होंगे। वर्तमान शिक्षा का तो हम सबको थोड़ा-बहुत पता है। इस शिक्षा का हमारी रोजाना जिन्दगी से कोई सम्बन्ध नहीं रहता। इसके द्वारा हमें, हरदम हमारे काम आने वाले शरीर का ज्ञान नहीं के बराबर ही मिलता है। वही दशा अपने गांव, अपने खेत के ज्ञान के सम्बन्ध में है। लेकिन दुनिया के भूगोल को तो हम तोते की तरह रटते हैं। मैं उसे अनुपयोगी नहीं कहता, लेकिन सभी चीजें मौके से शोभा देती हैं। हमें अपने शरीर, घर, गांव, गांव की चौहद्दी, वहाँ पैदा होने वाले पेड़-पौधों और गांव के इतिहास का अच्छा ज्ञान होना चाहिए। इस नींव के आधार वाला अन्य ज्ञान हमारे लिए उपयोगी हो सकता है।

शरीर पाँच महाभूतों से बना है। कवि ने कहा है :

छिति जल पावक गगन समीरा।

पंच रचित यह प्राणि-सरीरा॥

शरीर का व्यवहार दस इंद्रियों और मन द्वारा चलता है। दस इंद्रियों में पाँच कर्मेन्द्रियाँ और पाँच ज्ञानेन्द्रियाँ हैं। हाथ, पांव, मुँह, जननेंद्रिय और गुदा— पाँच कर्मेन्द्रियाँ हैं। स्पर्श करने वाली त्वचा, देखने वाली आँख, सुनने वाले कान, गंध जानने वाली नाक और स्वाद या रस को पहचानने वाली जीभ— ये पाँच ज्ञानेन्द्रियाँ हैं। मन के द्वारा हम विचार करते हैं। कोई-कोई मन को म्यारहवीं इंद्रिय कहते हैं। इन इंद्रियों के व्यवहार पूरी तरह चलते रहने पर ही मनुष्य तंदुरुस्त कहा जा सकता है। ऐसी तंदुरुस्ती बिरले की ही पाई जाती है।

किया बहुत, लेकिन अंत में वह इसी नतीजे पर आया कि वह अल्पज्ञ है।

शरीर के अंदर चलने वाली अद्भुत क्रियाओं पर ही इंद्रियों का सुख आधारित है। शरीर के सभी अंगों की नियमबद्धता पर शरीर का सही संचालन निर्भर है, किसी भी खास अंग का काम रुका कि गाड़ी अटकी। इनमें भी मेदा, अपना काम ठीक न करे तो समूचा शरीर मांदा हो जाता है। अतः हम कह सकते हैं कि अपच या कब्ज की ओर से लापरवाह रहने वाले शरीर-धर्म को नहीं जानते। अनेक रोग इसी में से पैदा होते हैं।

अब शरीर के उपयोग के बारे में विचार करें।

हर वस्तु का भला और बुरा उपयोग हो सकता है। शरीर पर भी यह नियम घटता है। उसे स्वार्थ या उच्छृंखलता अथवा दूसरों को हानि पहुँचाने में बरतना, उसका दुरुपयोग है। संसार की सेवा में लगाना, उससे संयम साधना, उसका सदुपयोग समझा जाएगा। हमारा शरीर यदि आत्मा को— जो परमात्मा का अंश है— पहचानने में लगाया जाए तो वह आत्मा के रहने का मंदिर बन जाता है।

शरीर को मल-मूत्र की खान कहा गया है। एक तरह से सोचने पर इसमें तनिक भी अतिशयोक्ति नहीं है। पर यदि शरीर इससे अधिक कुछ न हो तब तो उसका जतन करने के कोई मानी नहीं होते। लेकिन दूसरी दृष्टि से देखें और उसे मल-मूत्र की खान कहने के बजाय यह समझें कि उसमें कुदरत ने मल-मूत्रादि निकालने के द्वार भी रखे हैं तो उसे दुरुस्त रखकर सुरक्षित रखना हमारा कर्तव्य हो जाता है। हीरे या सोने की खान को देखा जाए तो वास्तव में तो वह मिट्टी की खान ही है; पर उसमें सोना या हीरा होने का ज्ञान मनुष्य से उसके पीछे करोड़ों रुपए खर्च करवाता है और उस पर अनेकानेक विशेषज्ञों की बुद्धि लगती है। फिर आत्मा के मंदिर-रूपी शरीर के लिए कुछ करने में क्या दुश्चारी है?

जगत में मनुष्य उसका ऋण चुकाने यानी उसकी सेवा करने को जन्म लेता है। इस दृष्टि से तो मनुष्य अपने शरीर का संरक्षक (ट्रस्टी) सिद्ध होता है। उसे शरीर का ऐसा जतन करना चाहिए कि वह सेवा-धर्म के पालन में पूरा काम दे सके।

'आरोग्य की कुंजी से' से

अरावली पर्वतमाला की सुरम्य वादियों में बसे अलवर को वीरभूमि राजस्थान के सिंहद्वार के रूप में जाना जाता है। इतिहास, कला, संस्कृति, पर्यटन, क्रीड़ा एवं शिक्षा की दृष्टि से राज्य में विशिष्ट स्थान रखने वाला अलवर औद्योगिक दृष्टि से इतना सम्पन्न है कि इसे राजस्थान की औद्योगिक राजधानी तक कहा जाता है। राजस्थान की आन, बान और शान के प्रतीक अलवर को 58वीं राष्ट्रीय बास्केट बाल छात्र-छात्रा (19 वर्षीय) प्रतियोगिता के आयोजन (3-8 नवम्बर, 2012) की मेजबानी करने का गौरव प्राप्त हुआ।

इस महत्वपूर्ण प्रतियोगिता का शुभारम्भ दिनांक 3 नवम्बर, 2012 को प्रातः 10.00 बजे केन्द्रीय खेल एवं युवा मामलात मंत्री (स्वतंत्र प्रभार) माननीय श्री भँवर जितेन्द्र सिंह ने अलवर के ऐतिहासिक इन्दिरा गाँधी स्टेडियम में किया। इस अवसर पर भव्य एवं रंगारंग कार्यक्रम के बीच विभिन्न राज्यों की टीमों ने मार्चपास्ट किया जिसकी सलामी मुख्य अतिथि माननीय खेल एवं युवा मामलात मंत्री श्री भँवर जितेन्द्र सिंह एवं समारोह के अध्यक्ष माननीय चिकित्सा एवं स्वास्थ्य मंत्री, राजस्थान सरकार जनाब एमामुद्दीन अहमद खान उर्फ दुरूमियां ने ली।

इस उल्लासपूर्ण वातावरण में अपने भावपूर्ण उद्बोधन में माननीय मुख्य अतिथि भँवर जितेन्द्र सिंह ने विभिन्न राज्यों से आये खिलाड़ियों, खेल अधिकारियों एवं खेल प्रेमियों का स्वागत करते हुए कहा कि हमारा भाव राजस्थान में दूरस्थ से दूरस्थ गाँव-ढाणियों में छिपी खेल प्रतिभाओं को सहयोग एवं संरक्षण देने का होना चाहिए।

मुख्य अतिथि ने भावुक होकर कहा कि यह खिलाड़ियों एवं खेल प्रेमियों की शुभकामनाओं का ही सुफल है कि जब उन्होंने इस खेल प्रतियोगिता के उद्घाटन की सहमति प्रदान की, तब वे गृहमंत्री थे और आज जब वास्तव में उद्घाटन कर रहे हैं, तब देश के खेल एवं युवा मामलात मंत्री हैं। यह उल्लेखनीय है कि हाल ही में हुए केन्द्रीय मंत्रिपरिषद् के पुनर्गठन में भँवर जितेन्द्र सिंह जी को खेल एवं युवा मामलों

**रपट**

**राजकीय यशवन्त उ.मा. विद्यालय, अलवर में**

## 58वीं राष्ट्रीय विद्यालयी बास्केटबाल प्रतियोगिता सम्पन्न

का मंत्री (स्वतंत्र प्रभार) बनाने के साथ ही गृह मंत्रालय में राज्यमंत्री का अतिरिक्त प्रभार सौंपा गया है। यह राजस्थान के लिए गौरव की बात है।

माननीय मुख्य अतिथि ने कहा कि हमारे देश भारत जैसी खेल प्रतिभाएँ विश्व में और कहीं भी देखने को नहीं मिलेंगी। उन्हें तराशने की जरूरत है। उन्होंने खेलों का केरियर के रूप में विकास करने की आवश्यकता जताई। चूँकि खिलाड़ी के रूप में वह लम्बे समय तक खेल नहीं सकता; अतः कोच, खेल परामर्शक आदि के रूप में उनकी सेवाएँ ली जानी चाहिए। केन्द्रीय खेलमंत्री ने कहा कि शीघ्र ही देश में जगह-जगह Centre of excellence स्थापित किए जाएँगे, जहाँ उत्कृष्ट खिलाड़ियों को तैयार किया जाएगा।

अपने उद्बोधन के पश्चात् मुख्य अतिथि ने 58 वीं राष्ट्रीय बास्केट बाल छात्र-छात्रा प्रतियोगिता के शुभारम्भ की घोषणा की। घोषणा में उनका साथ समारोह अध्यक्ष एवं विख्यात खिलाड़ी श्रीमती कृष्णा पूनिया ने दिया।

औपचारिक शुभारम्भ के पश्चात् माननीय मुख्य अतिथि एवं अध्यक्ष ने ध्वजारोहण कर

खिलाड़ियों को शपथ दिलाई। इस अवसर पर समारोह के अध्यक्ष चिकित्सा एवं स्वास्थ्य मंत्री ने खेलों के विकास के लिए विद्यालय स्तर से ही उन पर ध्यान दिए जाने की आवश्यकता जताई। उन्होंने खेलों को खेल भावना से खेलने तथा इसे हार-जीत से ऊपर उठकर खेलने की अपील खिलाड़ियों से की।

इससे पूर्व समारोह स्थल पर माननीय अतिथिगण के पहुँचने पर वहाँ उपस्थित अधिकारियों, दर्शकों, खिलाड़ियों, सभी ने करतल ध्वनि से उनका स्वागत किया। औपचारिक स्वागत एवं कार्यक्रम का परिचय माध्यमिक शिक्षा निदेशक एवं आयोजन समिति की अध्यक्ष डॉ. वीना प्रधान ने दिया। उन्होंने बताया कि स्कूल शिक्षा विभाग में स्वास्थ्य एवं शारीरिक शिक्षा को वर्षपर्यन्त एक विषय के रूप में पढ़ाया जाता है, जिसमें खेल कौशल सिखाने के साथ ही बच्चे के नैतिक एवं चारित्रिक विकास पर भी समुचित ध्यान दिया जाता है। राज्य में विद्यालय स्तर से लेकर जिला एवं राज्य स्तर पर विभिन्न खेल प्रतियोगिताएँ आयोजित कर खेल हीरो को तलाशा तथा तराशा जाता है।

इस अवसर पर युवा मामले एवं खेल विभाग, राजस्थान सरकार के प्रमुख शासन सचिव श्री मनोहर कान्त ने राजस्थान में खेलों के विकास की दिशा में किए जा रहे विभिन्न कार्यों एवं योजनाओं पर प्रकाश डाला। उन्होंने बताया कि माननीय मुख्यमंत्री द्वारा की गई अपनी बजट घोषणाओं का उल्लेख करते हुए शिक्षा विभाग से अपील की कि विद्यालय स्तर से ही बालक-बालिकाओं में खेलों के प्रति रुचि जाग्रत की जाए ताकि देश की भावी खिलाड़ी पीढ़ी का निर्माण हो सके।

58वीं राष्ट्रीय बास्केट बाल छात्र-छात्रा (19 वर्षीय) प्रतियोगिता के शुभारम्भ अवसर पर अलवर का इन्दिरा गाँधी स्टेडियम खचाख

### अनुभव

बास्केटबाल प्रतियोगिता उद्घाटन समारोह में अपने उद्बोधन में माननीय केन्द्रीय खेलमंत्री भँवर जितेन्द्र सिंह ने स्मृतियों के वातायन में झाँकते हुए कहा कि जब वे पढ़ते थे, तब उनके एक खेल प्रशिक्षक श्री रामपाल जी ने उन्हें शूटिंग प्रतियोगिता में भाग लेने के लिए कहा। मेरे मन में झिझक थी; लेकिन उन्होंने न केवल मुझे तैयार किया, अपितु उचित प्रशिक्षण देकर खेल में उतारा और मैं मेडल जीत कर आया। ऐसे खेल प्रशिक्षकों की जरूरत है।

भरा हुआ था। बड़ी संख्या में अलवर एवं देश व राज्य के अन्य जिलों से पधारे खेलप्रेमी उपस्थित थे। इस अवसर पर विशेष तौर से बनाए गए शुभंकर को देख-देखकर लोग रोमांचित हो रहे थे। जिस समय विभिन्न राज्यों के दल भिन्न-भिन्न रंगों के परिधान में मार्चपास्ट करते स्टेडियम में चल रहे थे तो दर्शकों की तालियाँ स्वतः ही बजने को आतुर हो रही थीं। लगता था कि जैसे पूरा देश अलवर के इस इन्दिरा गाँधी स्टेडियम में आ गया हो। आपसी प्रेम, सहयोग, सत्कार, सद्भाव, सहिष्णुता के मंगलभाव रच-बस गए थे चहुँ ओर।

अन्त में सांस्कृतिक कार्यक्रम हुआ जिसमें अलवर जिले की राजकीय एवं गैर राजकीय शिक्षण संस्थाओं की छात्राओं ने समवेत रूप में राजस्थानी गीत एवं झाँकियाँ प्रस्तुत की। “म्हारे गोर बंद नखरालो, घूमर, आतो सरगा नै शरमावे” जैसे कर्णप्रिय राजस्थानी गीतों ने दर्शकों को अभिभूत कर दिया।

58वीं राष्ट्रीय बास्केटबाल छात्र-छात्रा (19 वर्षीय) प्रतियोगिता का आयोजन राजकीय यशवन्त उच्च माध्यमिक विद्यालय, अलवर के

तत्वावधान में किया गया।

राष्ट्रीय बास्केटबाल प्रतियोगिता का समापन दिनांक 8 नवम्बर 2012 को अलवर के इन्दिरा गाँधी स्टेडियम में सम्पन्न हुआ जिसके मुख्य अतिथि राजस्थान राज्य क्रीड़ा परिषद् के अध्यक्ष श्री शिवचरण माली थे। समारोह की अध्यक्षता 20 सूत्री कार्यक्रम क्रियान्वयन समिति के जिला उपाध्यक्ष श्री कृष्ण मुरारी गंगावत ने की। इस अवसर पर विशिष्ट अतिथि के रूप में नगर विकास न्यास, अलवर के चेयरमैन श्री प्रदीप आर्य एवं स्कूल गेम्स फेडरेशन ऑफ इण्डिया के अध्यक्ष पद्मश्री सतपाल उपस्थित थे। पार्श्व में सारे जहाँ से अच्छा हिन्दोस्तां हमारा की धुन बजते ड्रम पीट पर हुआ मार्चपास्ट देशप्रेम का अद्भुत संदेश दे गया। दर्शकों की तालियाँ उनकी प्रसन्नता का इजहार कर रही थीं।

मार्चपास्ट के पश्चात आयोजन सचिव एवं जिला शिक्षा अधिकारी श्री कमलेश शर्मा ने अपना प्रतिवेदन प्रस्तुत किया। इस अवसर पर मुख्य अतिथि श्री शिवचरण माली ने कहा कि खेल में जीत से भी महत्वपूर्ण उसमें भाग लेना तथा खेल भावना खेलना है। जीवन की

चुनौतियों का खिलाड़ी रहा व्यक्ति बेहतर ढंग से सामना कर सकता है।

स्कूल गेम्स फेडरेशन के अध्यक्ष पद्मश्री सतपाल ने खिलाड़ियों को आशीर्वाद देते हुए कहा कि अन्तर्राष्ट्रीय बास्केट बाल प्रतियोगिता के लिए जाने वाली टीम का चयन इन्हीं खिलाड़ियों में से किया जाएगा। उन्होंने खेलों में सफलता के लिए कड़ी मेहनत के साथ बड़ा लक्ष्य रखने के साथ ही दृढ़ निश्चयी बनने की आवश्यकता प्रकट की। इनके अलावा अनुशासन, चरित्र एवं माता-पिता तथा गुरुजन का आदर करने पर भी अपने उद्देश्य में सफलता मिलती है। समापन समारोह को स्कूल गेम्स फेडरेशन ऑफ इण्डिया के अतिरिक्त सचिव श्री के.एस. मूर्ति एवं पर्यवेक्षक श्री अशोक कुमार ने भी सम्बोधित किया।

अन्त में भव्य सांस्कृतिक कार्यक्रम के साथ ही यह ऐतिहासिक आयोजन सम्पन्न हुआ। इस प्रतियोगिता में छात्र वर्ग में दिल्ली विजेता व पंजाब उपविजेता तथा छात्रा वर्ग में केरल विजेता व राजस्थान उप विजेता रहे।

—ओमप्रकाश सारस्वत  
वरिष्ठ सम्पादक (शिविरा)

## खेल सुविधाओं के लिए बजट

(राजस्थान का बजट 2012-13)

**खिलाड़ियों को देय पुरस्कार राशियों में दस गुना वृद्धि :** ● अंतर्राष्ट्रीय स्पर्धाओं में प्रथम स्थान प्राप्त करने पर 50 हजार के स्थान पर 5 लाख रुपये, द्वितीय स्थान प्राप्त करने पर 30 हजार रुपये के स्थान पर 3 लाख रुपये एवं तृतीय स्थान प्राप्त करने पर 20 हजार रुपये के स्थान पर 2 लाख रुपये। ● राष्ट्रीय स्पर्धाओं में प्रथम स्थान प्राप्त करने पर 25 हजार रुपये के स्थान पर 2 लाख 50 हजार रुपये, द्वितीय स्थान प्राप्त करने पर 10 हजार रुपये के स्थान पर 1 लाख रुपये एवं तृतीय स्थान प्राप्त करने पर 5 हजार रुपये के स्थान पर 50 हजार रुपये। ● राज्य स्तरीय स्पर्धाओं में प्रथम स्थान प्राप्त करने पर 10 हजार रुपये के स्थान पर 1 लाख रुपये, द्वितीय स्थान प्राप्त करने पर 5 हजार रुपये के स्थान पर 50 हजार रुपये एवं तृतीय स्थान प्राप्त करने पर 2 हजार रुपये के स्थान पर 20 हजार रुपये। (146)

**खेल अकादमी :** ● केन्द्र सरकार के सहयोग से उदयपुर में जनजाति खेल अकादमी की स्थापना की जाएगी, जिस पर 5 करोड़ रुपये की लागत आएगी। (149) ● जैसलमेर में बास्केट-बॉल अकादमी स्थापित करने हेतु 50 लाख रुपये। ● करौली में कबड्डी अकादमी स्थापित करने हेतु 50 लाख रुपये। ● कोटा में नौकायन अकादमी स्थापित करने हेतु 50 लाख रुपये। ● जोधपुर स्थित फुटबाल अकादमी को भी 50 लाख रुपये की सहायता उपलब्ध कराई जाएगी। (149.02)

**निर्माण कार्य :** ● बूंदी, चूरू, झुंझुनूं, पाली, अलवर, मकराना-नागौर, चित्तौड़गढ़ और हनुमानगढ़ में खेल संकुलों के निर्माण हेतु 16 करोड़ रुपये का प्रावधान। (147) ● खेल स्टेडियमों के संधारण हेतु 2 करोड़ 50 लाख रुपये का प्रावधान। (147.01) ● जोधपुर के गोशाला खेल काम्प्लेक्स में 5 करोड़ रुपये की लागत के सिंथेटिक ट्रेक के निर्माण हेतु राज्य सरकार द्वारा 3 करोड़ रुपये का अंशदान दिया जाएगा। (147.02) ● प्रदेश में प्रत्येक उपखंड स्तर पर खेल स्टेडियमों के निर्माण अथवा उच्चीकरण हेतु स्थानीय निकाय, पंचायती राज संस्थाओं, निजी सहयोग अथवा माननीय सांसदों एवं विधानसभा सदस्यों द्वारा राशि उपलब्ध करवाने पर राज्य सरकार द्वारा भी 10 लाख रुपये तक की Matching Grant दी जाएगी। (148)

(साधार : सूचना एवं जनसम्पर्क विभाग, राजस्थान जयपुर द्वारा प्रकाशित 'जनता का अपना बजट - 2012-13' पृ.सं. 45-46)

# गणित की कुछ रुचिकर पहेलियाँ

## □ निधि शेखावत

### 1. भास्कर - लीलावती समस्या :

प्राचीन गणितज्ञ भास्कर ने अपनी पुस्तक लीलावती में गणित की जटिल समस्याओं का समाधान किया है। हम उसमें से एक समस्या का उदाहरण उल्लेख कर रहे हैं—

**उदाहरण :** वह संख्या ज्ञात करो जिसको 3 का गुणा करने पर प्राप्त गुणफल में गुणनफल का ही तीन-चौथाई जोड़ने पर प्राप्त योग में 7 का भाग देने पर प्राप्त भागफल में भागफल का ही एक तिहाई घटाकर उसका वर्ग करके 52 घटाने पर प्राप्त राशि के वर्गमूल में 8 जोड़ने पर प्राप्त योग में 10 का भाग देने पर भागफल 2 प्राप्त होता है।

**हल :**

$$\frac{1}{10} \left\{ \sqrt{\left[ \frac{2}{3} \left( \frac{3x + \frac{3}{4}(3x)}{7} \right)^2 - 52 \right]} + 8 \right\} = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left( \frac{2}{3} \right)^2 \left( \frac{3x + \frac{9x}{4}}{7} \right)^2 - 52} = 20 - 8$$

$$= 12$$

$$\Rightarrow \left( \frac{2}{3} \right)^2 \left( \frac{21x}{28} \right)^2 - 52 = 144$$

$$\Rightarrow \left( \frac{2}{3} \right)^2 \left( \frac{3x}{4} \right)^2 = 196$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \left( \frac{3x}{4} \right) = 14 \Rightarrow x = 28$$

अतः अभीष्ट संख्या  $x = 28$

2. एक कर्मचारी का वेतन, रुपयों तथा पैसों में भुगतान करना था परन्तु भुगतान करते समय गलती से कर्मचारी को रुपयों के स्थान पर पैसे तथा पैसों के स्थान पर रुपये दे दिये। कर्मचारी ने 50 पैसे खर्च करने के बाद देखा कि उसके पास वेतन का तिगुणा बचा है। कर्मचारी का वेतन ज्ञात करो?

**हल :** माना कर्मचारी का वेतन  $x$  रुपये तथा  $y$  पैसे हैं।

अर्थात् वेतन =  $(100x + y)$  पैसे  
गलती से कर्मचारी को  $y$  रुपये तथा  $x$  पैसों का भुगतान कर दिया गया अर्थात्  $(100y + x)$  पैसे तथा उसने 50 पैसे खर्च किये।

शेष राशि =  $100y + x - 50$

प्रश्नानुसार यह राशि वास्तविक वेतन का तिगुणा है अतः

$$100y + x - 50 = 3(100x + y)$$

$$\text{या } 97y - 299x = 50$$

$$\therefore x < y < 100 \text{ अतः } x=18, y=56$$

अतः कर्मचारी का वेतन 18 रुपये 56 पैसे।

3. खिलाड़ी A के पास खिलाड़ी B से एक सिक्का अधिक है। दोनों खिलाड़ी एक साथ सारे सिक्के उछालते हैं। खिलाड़ी A को खिलाड़ी B से अधिक चित्त प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

**हल :** खिलाड़ी A खिलाड़ी B से ज्यादा चित्त प्राप्त करता है या ज्यादा पट प्राप्त करता है। चूँकि ये दोनों घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हैं अतः खिलाड़ी A खिलाड़ी B से अधिक चित्त प्राप्त करता है, की प्रायिकता  $\frac{1}{2}$

**नोट :** दोनों खिलाड़ियों के पास सिक्कों की संख्या असमान होने पर भी प्रायिकता  $\frac{1}{2}$

4. निम्नलिखित पहेली में  $2=1$  सिद्ध

करते हैं, कृपया त्रुटि ज्ञात करें।

माना  $a = b$ , दोनों ओर  $a$  का गुणा करने पर  $a^2 = ab$

दोनों ओर  $b^2$  घटाने पर

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

$$\text{या } (a+b)(a-b) = b(a-b)$$

दोनों ओर उभयनिष्ठ पद  $(a-b)$  का भाग दिया  $(a+b) = b$

$$\text{यदि } a = b = 1$$

$$\text{तब } 1+1 = 1$$

$$\text{अर्थात् } 2 = 1$$

संकेत— चूँकि  $a = b \Rightarrow a - b = 0$   
अतः दोनों ओर  $a - b = 0$  का भाग नहीं दे सकते।

5. उदाहरण : निम्नलिखित पहेली में

$$\frac{1}{8} > \frac{1}{4} \text{ सिद्ध करते हैं। कृपया त्रुटि ज्ञात करें।}$$

हम जानते हैं कि  $3 > 2$

दोनों ओर  $\log \frac{1}{2}$  का गुणा करने पर

$$3 \log \frac{1}{2} > 2 \log \frac{1}{2}$$

$$\text{या } \log \left( \frac{1}{2} \right)^3 > \log \left( \frac{1}{2} \right)^2$$

$$(\because x \log a = \log a^x)$$

$$\text{या } \log \frac{1}{8} > \log \frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{8} > \frac{1}{4}$$

संकेत : दोनों ओर  $\log \frac{1}{2} = -\log 2$  का गुणा करने पर असमिका का चिह्न  $>$  के स्थान पर  $<$  करना होगा।

—वरिष्ठ व्याख्याता, गणित विभाग  
मरुथर इन्जीनियरिंग कॉलेज, बीकानेर

## संख्याओं का क्रमिक विकास

□ डॉ. शौकत अली

ऋग्वेद संहिता को संयुक्त राष्ट्र संघ ने विश्व के प्राचीनतम ग्रन्थ की मान्यता प्रदान कर सांस्कृतिक धरोहर के रूप में इसकी प्रतियाँ संरक्षित की है। वैदिक ऋषियों को संख्याओं का ज्ञान था। वेदों की विशुद्धता के बारे में वैदिक ऋषि इतने जागरूक थे कि उन्होंने ऋचाओं (स्तुति मंत्र) की संख्या 10552, ऋचाओं के शब्दों की संख्या एक लाख 53 हजार 08 सौ 26 (153826) तथा ऋचाओं के अक्षरों की संख्या चार लाख बत्तीस हजार (432000) गिन रखी थी।

अंक 1,2,3,4,5,6,7,8,9 तथा 0 हिन्दू अरबिक संख्याएँ कहलाती है। इन अंकों का आविष्कार सर्वप्रथम भारत में हुआ। जब भारतीय सभ्यता, संस्कृति तथा ज्ञान का प्रसार अरब देशों में हुआ तब अरब देशों को भी इन संख्याओं का ज्ञान हुआ। अरब से यह ज्ञान युरोप को प्राप्त हुआ। निम्नलिखित तालिका में इन अंकों के विभिन्न स्वरूप प्रदर्शित किये गये हैं:-

Brahmi									
		—	=	≡	+	॥	७	१	५
Hindu	०	१	२	३	४	५	६	७	८
Arabic	•	१	२	३	४	५	६	७	८
Medieval	0	I	2	3	४	५	6	7	8
Modern	0	1	2	3	4	5	6	7	8

12 वीं शताब्दी में इटली के गणितज्ञ लियोनार्डो पिसानो ने उत्तरी अफ्रीका में शिक्षा ग्रहण की तथा हिन्दू-अरबिक के अंकों का ज्ञान प्राप्त किया और इटली में इन संख्याओं का प्रचार-प्रसार किया। इस प्रकार संख्याओं का ज्ञान युरोपीय देशों को प्राप्त हुआ। इससे पूर्व पांचवी शताब्दी में पाश्चात्य देशों में अंकों को एपिसेज के रूप में व्यक्त करते थे। प्रत्येक एपेक्स का अलग से नाम था : संख्या 1 के लिए इगिन, 2 के लिए अन्ड्रास, 3 के लिए ओरमिस, 4 के लिए अरबस, 5 के लिए क्यूमस, 6 के लिए कलटिस, 7 के लिए जेनिस या टेनिस, 8 के लिए टेमेंसिया, 9 के लिए स्केलेंटिस का प्रयोग किया गया। बेयोथियस ने दसवीं, ग्यारवीं बारहवीं शताब्दी तथा आधुनिक युग में निम्नलिखित तालिका में एपिसेज से आधुनिक अंकों का विवरण दिया।

X century	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
XI century	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
XII century	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Modern	1	2	3	4	5	6	7	8	9

हिन्दू-अरबिक संख्याओं का प्रयोग करने से पूर्व युरोप के लोग रोमन अंकों का उपयोग करते थे। रोमन संख्याएँ बाईक्युनरी पद्धति (V=5) पर आधारित हैं तथा रोमन पद्धति में X=10, L=50, C=100, D=500, M=1000 होता है। उदाहरण स्वरूप V+I=VII (7), X+I=XI (11), C+V=CV (100+5=105), C+X+X+I=CXXI (100+10+10+1=121), IX(9), XCIV (C से पूर्व X अर्थात् XC=90, V से पूर्व I अर्थात् IV=4 अतः 90+4 = 94) संख्याओं को लिखने के लिए रोमन लोगों ने योग पद्धति तथा व्यवकलन पद्धति का प्रयोग किया।

सन् 1921 में सिंधु घाटी संस्कृति की खोज पंजाब के हड़प्पा में की गई तत्पश्चात मोहनजोदड़ो की खोज हुई जो सिंधु नदी के पास है। इन दोनों शहरों में एक सौ से अधिक छोटे कस्बे तथा गाँव थे। यह सभ्यता 2500 ईसा पूर्व के आसपास की है। हड़प्पा सभ्यता में बाट और माप की एक समान प्रणाली प्रयोग में लायी जाती थी। एक विश्लेषण से पता चलता है कि हड़प्पा निवासी दशमलव का उपयोग करते थे। लम्बाई नापने तथा वजन ज्ञात करने के उनके पास औजार तथा तराजू थे जो खुदाई के दौरान प्राप्त हुए। 1.32 इंच (3.35 सेंटीमीटर) को सिंधु इंच कहते थे। माप की इकाई के आधार पर बड़े पैमाने थे। दस सिंधु इंच अर्थात् 13.2 इंच को एक "पैर" कहते थे जो वर्तमान में 12 इंच बराबर 01 फुट के काफी नजदीक है। कांस्य छड़ी का एक अन्य पैमाना पाया गया जो 0.367 इंच की लम्बाई में चिह्नित किया गया। इस प्रकार की 100 इकाईयों को 36.7 इंच कहा गया। इससे स्पष्ट होता है कि हड़प्पा निवासियों को दशमलव की संख्याओं की गुणन संक्रिया का ज्ञान था।

अंक शून्य: — अंक शून्य के आविष्कार का पूर्ण श्रेय प्राचीन भारतीय गणितज्ञों को है। चूँकि हिन्दू-अरबिक संख्याएँ "स्थानीय मान पद्धति" पर निर्भर है अतः अंक शून्य की आवश्यकता हुई। वैदिक ऋषियों को अंक शून्य का ज्ञान था तथा वे इसका प्रयोग भी करते थे। शून्य के आविष्कार ने गणित के इतिहास में क्रान्ति उत्पन्न



कर दी। बिना शून्य के गणित के महत्त्वपूर्ण विषय “कलन”, वित्तीय लेखा शास्त्र, अंकगणित की समस्याओं का हल तथा विशेषकर कम्प्यूटर्स का अस्तित्व ही नहीं होता। दैनिक जीवन में भी शून्य बहुत महत्त्वपूर्ण है। किसी का मासिक वेतन 10,00,00 रुपये में इकाई अंक का शून्य हटा दिया जाये तो वेतन 10,000 अर्थात् दसवाँ भाग रह जायेगा।

प्राचीन सुमेरिया के लोगों ने अपने सामान, पशु, घोड़े, गधे आदि का विवरण रखने के लिए “गणना पद्धति” का विकास किया। सुमेरिया से “गणना पद्धति” (2500 बी.सी.) का ज्ञान अक्कादिन्स को तथा वहाँ से बेबीलोनियन्स (2000 बी.सी.) को प्राप्त हुआ। बेबीलोनियन्स ने शून्य की परिकल्पना “अनुपस्थित अंक” के रूप में की। प्राचीन ग्रीस के प्रसिद्ध गणितज्ञ, जिन्होंने मिश्र से गणित का ज्ञान प्राप्त किया, शून्य के बारे में नहीं जानते थे। एकमात्र प्राचीन भारत को ही शून्य का ज्ञान था तथा उन्होंने शून्य को संकेत 0 से निरूपित किया तथा गणित में इसका उपयोग किया।

650 ए.डी. में ब्रह्मगुप्त ने सर्वप्रथम अंकगणितीय संक्रियाओं में शून्य का उपयोग किया था तथा उसने अंक के पास नीचे की ओर शून्य को बिन्दु से निरूपित किया, उदाहरण  $7. = 70$  और इसको “रिक्त स्थान” या “खा” से भी निरूपित किया गया। ब्रह्मगुप्त ने योग तथा व्यवकलन में शून्य का प्रयोग किया तथा ऋणात्मक संख्याओं -1, -2, -3, -4, ..... का आविष्कार किया। ब्रह्मगुप्त ने किसी संख्या को शून्य से भाग देने में त्रुटि की। अरब के समुद्री यात्री भारत से ब्रह्मगुप्त का साहित्य (जिसमें शून्य का वर्णन था) बगदाद (773 ए.डी.) ले गये तथा मध्य पूर्व में अरबियन्स ने भारतीय अंक पद्धति का विकास किया। नवीं शताब्दी में मोहम्मद-बिन-मुसा-अल-खोवारिजमी प्रथम गणितज्ञ था जिसने उन समीकरणों का हल किया जो शून्य के बराबर थीं तथा उसने शून्य को “सिफर” नाम दिया। 879 ए.डी. में शून्य “0” के रूप में लिखा जाने लगा परन्तु अन्य अंकों से आकार में छोटा। जब मूरस ने स्पेन को जीता तब 12 वीं शताब्दी के मध्य में युरोप को शून्य का ज्ञान प्राप्त हुआ तथा “अल-खोवारिजमी” की पुस्तक के अनुवाद से इंग्लैण्ड को शून्य का ज्ञान प्राप्त हुआ।

कार्टिजियन निर्देशांक के आविष्कारक रेने डेसकार्टिज ने अपने निर्देशांक में मूल बिन्दु को (0,0) से निरूपित किया। इस समय तक न्यूटन तथा लीबनीज ने कलन के आविष्कार में शून्य का परिष्कृत रूप से उपयोग किया तथा किसी संख्या को 0 से भाग की समस्या का “सीमा” सिद्धान्त से निदान किया तथा 0/0 को अनिर्धार्य कहा एवं इसी सिद्धान्त पर कलन का आविष्कार हुआ। उदाहरणतः अल्प समय  $\Delta t$  में अल्प दूरी  $\Delta x$  तय करने पर औसत वेग  $= \Delta x / \Delta t$ , किसी बिन्दु पर वेग ज्ञात करने के लिए  $\Delta t$  तथा  $\Delta x$  दोनों को कम करते हुए शून्य के बहुत नजदीक लाने पर उस बिन्दु पर वेग-

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow 0 \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = x \text{ का अवकलन } t \text{ के सापेक्ष।}$$

इस प्रकार कलन के सिद्धान्त का प्रादुर्भाव हुआ। 1600 ईस्वी में न्यूटन तथा लीबनीज दोनों ने स्वतन्त्र रूप से कलन की खोज की।

यदि शून्य का आविष्कार नहीं हुआ होता तो कलन का आविष्कार नहीं होता तथा गणित, भौतिक शास्त्र, इंजिनियरिंग, अर्थशास्त्र और वित्तीय लेखा आदि का विकास अवरुद्ध हो जाता।

कम्प्यूटर्स में द्विआधारी संक्रिया अंक शून्य तथा अंक एक पर आधारित है। अतः शून्य के बिना कम्प्यूटर्स की उपयोगिता नहीं रहती। हमारे व्यावहारिक जीवन में शून्य इतना महत्त्वपूर्ण है कि ‘शून्य के बिना’ ऐसा हम सोच ही नहीं सकते। बिना शून्य विश्व की भौतिक उन्नति अवरुद्ध हो जाती।

**गणित में अनन्त** : अंग्रेजी शब्द Infinity लैटिन शब्द Infinitas से व्युत्पन्न हुआ है जिसका अनुवाद “अपरिबद्धता” शब्द से किया जा सकता है। गणित में अनन्त ( $\infty$ ) का अर्थ संख्यात्मक न होकर गुणात्मक रूप से लिया जाता है अर्थात् हम जो भी संख्या सोचें, अनन्त उससे ज्यादा। किसी भी श्रेणी में अनन्त पद हो सकते हैं। उदाहरण के लिए अनन्त पदों की गुणोत्तर श्रेणी लेते हैं जिसका सार्वनुपात  $r < 1$  तथा प्रथम संख्या  $a$  है -

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^{n-1} + \dots \infty$$

इसके  $n$  पदों का योग

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, r < 1$$

अब यदि  $n \rightarrow \infty$  तब  $\lim r^n = 0, r < 1$  अतः अनन्त पदों का योग  $n \rightarrow \infty$

$$S = \frac{a}{1-r} = \text{परिमित राशि } r \neq 1$$

प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय  $N$ , पूर्णांकों का समुच्चय  $I$ , परिमेय संख्याओं का समुच्चय  $Q$  तथा वास्तविक संख्याओं का समुच्चय  $R$  आदि सब समुच्चयों में अनन्त संख्याएँ हैं अतः इनको अनन्त समुच्चय कहते हैं। अतः अनन्त की अवधारणा के बिना गणित की उन्नति सम्भव नहीं थी। कलन में  $\Delta x$  को Infinitesimal” अर्थात् अत्यन्त ही छोटा लेते हैं अर्थात्  $x$  में अत्यन्त ही अल्प वृद्धि। प्राचीन संस्कृतियों में प्रकृति को दार्शनिक माना गया। प्राचीन भारतीयों ने परमात्मा और ब्रह्माण्ड को अनन्त माना। यजुर्वेद के चालीसवें अध्याय (ईशावास्योपनिषद्) का शांति मंत्र है-

ॐ पूर्णमदः पूर्णमिदं पूर्णात् पूर्णमुदच्यते।

पूर्णस्य पूर्णमादाय पूर्णमेवावशिष्यते॥

इस मंत्र में पूर्णमदः (पूर्णम अदः) का अर्थ “वह पूर्ण है”। जो यहाँ अनन्त ( $\infty$ ) का प्रतीक है, पूर्णमिदं (पूर्णम् इदम्) का अर्थ “यह पूर्ण है” का भाव भी अनन्त ही है क्योंकि पूर्णात् पूर्णमुदच्यते का अर्थ “पूर्ण से पूर्ण की उत्पत्ति होती है” तथा पूर्णस्य पूर्णमादाय पूर्णमेवावशिष्यते का अर्थ “पूर्ण का पूर्णत्व निकालने पर पूर्ण ही शेष रहता है” अर्थात् अनन्त (पूर्ण) में से अनन्त (पूर्ण) निकालने पर अनन्त (पूर्ण) ही शेष रहता है। इस प्रकार वैदिक ऋषियों को भी अनन्त की अवधारणा का ज्ञान था।

-व्याख्याता, गणित विभाग

राजकीय अभियांत्रिकी महाविद्यालय बीकानेर (राज.)

## शिविरा विचार मंच

गणित विशेषांक हेतु सुधि पाठक शिक्षकों/गणित प्रेमियों से उनके अनुभवजन्य विचार शिविरा विचार मंच के अन्तर्गत प्रकाशित करने के लिए आमंत्रित किए गए थे। विषय था— बालकों के लिए गणित शिक्षण रोचक और आनन्ददायी कैसे हो? मेरे अनुभव। बड़ी संख्या में वैचारिक अवदान अपने सम्माननीय पाठकों की ओर से शिविरा को मिला। यहाँ तीन विचार प्रकाशित किए जा रहे हैं। ऐसे विचार प्राप्त होने पर आगामी अंकों में यह सिलसिला जारी रहेगा। कृपया अपने विचार संक्षेप में लिखें तथा साथ में अपना फोटो भी भिजवाएँ। —ब.सं.

### आत्मीयता से छात्र बना इंजीनियर



किसी विषय का सरल, कठिन, रुचिकर अथवा अरुचिकर होना बहुत कुछ शिक्षक की शिक्षण विधि एवं छात्र-छात्राओं के प्रति उसके व्यवहार पर निर्भर करता है। कठिन-विषयों में गणित को सर्वोपरि माना जाता है। प्रायः छात्र-छात्राएँ गणित के प्रति एक तरह से भयभीत ही रहते हैं। ऐसे में यह शिक्षक पर निर्भर करता है कि वह ऐसे छात्र-

छात्राओं का कुशल मार्गदर्शन करते हुए उनके मन में बैठे भय को दूर भगाए तथा विषय के प्रति रुचि जगाकर सफलता का मार्ग प्रशस्त करे। ऐसे हजारों उदाहरण हम शिक्षकों के सेवाकाल में देखने को आते हैं।

ऐसा ही एक उदाहरण मेरे सेवाकाल का है। राज्य सेवा में गणित के शिक्षक के रूप में मैंने पदार्पण किया था और मेरा पदस्थापन उस समय राजकीय बागड़ उच्च माध्यमिक विद्यालय, पाली में था। यह वर्ष 1975 की बात है। एक छात्र था— मांगीलाल। गणित से भयाक्रान्त होकर उसने विद्यालय से पलायन करने का मानस बना लिया था। दरअसल बात यह थी कि छात्र मांगीलाल को उसके पिताजी ने इंजीनियर बनाने के उद्देश्य से कक्षा नौवीं में गणित ऐच्छिक विषय के रूप में दिलाया था। यह उल्लेखनीय है कि 1988 से पूर्व उस दौर में कक्षा नौवीं से ऐच्छिक विषय यथा कला, विज्ञान, वाणिज्य लेकर पढ़ाई कराई जाती थी। पर दुर्भाग्य से छात्र मांगीलाल कक्षा नौवीं में अनुत्तीर्ण हो गया और वह भी गणित विषय के कारण। छात्र अपनी टी.सी. लेने आया। टी.सी. देने से पूर्व कारण पूछने पर उसने बताया कि गणित में कमजोर होने के कारण वह आगे पढ़ना नहीं चाहता।

मेरा शिक्षक मन जाग उठा। मैंने उसके सिर पर हाथ रखकर हौसला बढ़ाया तथा एक बार अपने पिता को मेरे पास भेजने को कहा। अगले दिन उसके पिताजी मिलने के लिए विद्यालय में आ गए।

“गुरु जी, मैंने तो मांगीलाल को इंजीनियर बनाने के लिए गणित विषय दिलाया था, लेकिन यदि इसके भाग्य में इंजीनियर बनना नहीं है तो ...।” वे इतना ही बोल पाए।

मेरे मन में अन्तर्द्वन्द्व चलता रहा। भाग्य और पुरुषार्थ में से पुरुषार्थ का मैं पक्षधर था। भाग्य की बात अपनी जगह सही है लेकिन व्यक्ति यदि पुरुषार्थ करे तो भाग्य बदल सकता है। खैर, मैंने छात्र के पिताजी को आश्वस्त करते हुए उसे एक साल और पढ़ाने की हामी भरवाई। मांगीलाल का पुनः प्रवेश कक्षा नवम् में हो गया। वह पूरी रुचि व लगन से पढ़ने लगा। गणित और भौतिक शास्त्र मैं पढ़ाता था। कक्षाध्यापक तो था ही। मुझे मांगीलाल से आत्मीय लगाव हो गया था। आखिर यही तो करना

होता है एक शिक्षक को। उसे निजी तौर पर भी कोचिंग करने के लिए मेरे पास कभी भी आ सकने का आत्मीय निर्देश मैंने दे दिया। मांगीलाल भी मुझे जैसे अपना संरक्षक मानने लगा था। मुझे तो मेरा बच्चा लगता ही था।

फिर क्या था ! मांगीलाल ने विद्यालय में द्वितीय स्थान के साथ नौवीं कक्षा तथा प्रथम श्रेणी में सैकण्डरी स्कूल परीक्षा उत्तीर्ण की। इतना ही नहीं, उच्च माध्यमिक स्तर पर तो उसने 86 प्रतिशत अंक हासिल किये। मांगीलाल का जोधपुर के इंजीनियरिंग कॉलेज में एडमिशन हो गया और समय आने पर सफलतापूर्वक इंजीनियरिंग डिग्री प्राप्त कर वह इंजीनियर बन गया तथा आज बिजली विभाग में अधिशाषी अभियन्ता के यशस्वी पद पर कार्य कर अपने परिवार का नाम रोशन कर रहा है। शिक्षक को ऐसे शिष्यों पर गर्व होना स्वाभाविक है।

मेरे कहने का भाव बस इतना ही है कि हम शिक्षकों को अपनी क्षमता एवं योग्यता से अपने पास पढ़ रहे छात्र-छात्राओं का कुशल मार्गदर्शन करते हुए उनके भीतर में विकसित हो रही कुण्ठाओं से उन्हें बचाना चाहिए। फिर कोई ताकत नहीं है जो बच्चे को असफल कर सके।

—शिवजीराम चौधरी, संयुक्त निदेशक (कार्मिक)

माध्यमिक शिक्षा, राजस्थान, बीकानेर

### यों समझ में आया लाभ-हानि का गणित

यह सर्वविदित है कि भारत एक गणितीय देश रहा है जहाँ पर आर्यभट्ट, रामानुज जैसे महान गणितज्ञों ने इस पवित्र भूमि पर जन्म लिया। जिन्होंने दुनिया को गणित के मूलभूत आधार दशमलव व शून्य दिया। मगर विद्यार्थियों में गणित विषय में सामान्यतः अरुचि देखी जा रही है। इसका मूलभूत कारण गणित को व्यावहारिक व रोचकपूर्ण ढंग से हमारे विद्यालय में नहीं पढ़ाया जाना है। इसके कारण लाखों छात्रों को गणित कठिन लगने लगती है और वे इसे स्कूल स्तर में ही छोड़ देते हैं।

हमें गणित को और व्यावहारिक बनाना होगा, गणित को एक विषय नहीं समझना चाहिए उसे जीवन की रोजमर्रा की घटनाओं में उपयोगी अंग मानना चाहिए। जैसे कि मेरे एक छात्र को क्रय मूल्य, विक्रय मूल्य, लाभ व हानि के सवाल नहीं आ रहे थे, वह सूत्र रट रहा था और भूल रहा था तब मैंने उसे अलग तरीके से समझाने का प्रयास किया। मैंने उसे 10 रु. का एक पैन लाने को कहा वह पैन ले आया। फिर मैंने उसे उस पैन को दूसरे छात्र को 2 रु. के लाभ से बेचने को कहा फिर मैंने उस छात्र से पूछा उस पैन को कितने रु. में बेचेगा तो उसने जवाब दिया 12 रु. में। इस प्रकार उस छात्र को समझ में आ गया कि विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य + लाभ होता है।

अतः छात्रों में गणित को रोचक बनाने के लिए उन्हें शुरू से ही व्यावहारिक रूप से पढ़ाया जाना चाहिए न कि केवल गणित के सूत्र रटाकर।

अगर छात्र गणित को शुरू से ही अपने रोजमर्रा की घटनाओं से जोड़ेगा तो उसे गणित पढ़ने व समझने में आनन्द महसूस होगा। उल्लेखनीय है कि बच्चों को गणित पढ़ाते समय बच्चों से जुड़ी चीजों जैसे चॉकलेट, खिलौने, कार्डून आदि का उदाहरण देते हुए समझाना चाहिए, ताकि उनमें गणित फोबिया को दूर किया जा सके एवं उन्हें गणित रुचिकर व आनन्ददायी लगने लगे।

—महेश चन्द सिद्ध, प्रधानाध्यापक  
रा.उ.प्रा. विद्यालय, टहला, तह. राजगढ़, अलवर

## नवाचारों की माँग करती है गणित

गणित शिक्षण प्रायः नीरस एवं कठिन माना जाता है, लेकिन ऐसा नहीं है। शिक्षक यदि बालकों की रुचि, आयु एवं स्थानीय परिवेश के अनुकूल कुछ नवाचारों का प्रयोग करें तो गणित शिक्षण रोचकता से परिपूर्ण हो सकता है साथ ही पाठ्यक्रम को भी निश्चित अवधि में पूर्ण कराया जा सकता है। प्रसिद्ध शिक्षाविद् गिजुभाई ने स्वयं विभिन्न प्रकार के प्रयोग कर अनेक रोचक तरीकों से शिक्षण की विधियाँ खोजी थीं। विभिन्न सेवारत शिक्षक प्रशिक्षणों में संदर्भ व्यक्तियों द्वारा रोचक गतिविधियों के माध्यम से गणित शिक्षण की तकनीकों/विधाओं पर चर्चा की जाती है लेकिन प्रशिक्षण में सीखी गई विद्याओं को कक्षा शिक्षण में उपयोग कम ही शिक्षक कर पाते हैं, अधिकांश शिक्षक पाठ्यक्रम पूर्ण कराने को ही पर्याप्त समझते हैं।

गणित शिक्षण को रोचक बनाने हेतु निम्न विधाओं का प्रयोग किया जाना उचित रहेगा— (A) खेल-खेल में गणित, (B) पद्य गणित, (C) चित्रों द्वारा गणित शिक्षण, (D) कहानी द्वारा गणित शिक्षण, (E) गणितज्ञों की जीवनियाँ, (F) शिक्षण सहायक सामग्री (टी.एल.एम) का प्रयोग, (G) कक्षा कार्य में विद्यार्थियों पर व्यक्तिगत ध्यान देना, (H) प्रतिस्पर्धा की भावना पैदा करना, (I) पहेली, अंकों का जादू, दिमागी कसरत, तीलियों के खेल आदि।

(A) खेल-खेल में गणित— शिक्षण सहायक सामग्री (T.L.M) के माध्यम से अनेक गणित के खेल कराये जा सकते हैं, बिना T.L.M के भी खेल विधि से गणित शिक्षण कराया जा सकता है जैसे—

(i) कक्षा में 30-40 छात्रों को गोले में खड़े कर गिनती बुलवाई जावे जहां 7 का अंक आवे अथवा संख्या में 7 का भाग पूरा-पूरा जावे वहां ओम बोला जावे, गलती करने पर उस विद्यार्थी को अलग बैठाया जाकर पुनः शेष विद्यार्थियों से उक्त खेल प्रारम्भ कराया जावे। इस तरह अंत में शेष रहे 2 विद्यार्थियों को प्रथम एवं द्वितीय घोषित किया जाये।



(ii) इकाई, दहाई, सैकड़ा का खेल— चित्रानुसार आयताकार घेरे बनाकर उसमें इकाई, दहाई, सैकड़ा, हजार आदि अंकित करें, चाक के 20-25 छोटे-छोटे टुकड़े लेकर विद्यार्थियों से खड़े होकर उन आयतों पर टुकड़े डालने हेतु कहें। जिस आयत में जितने चाक के टुकड़े आवें, उसके हिसाब से संख्या श्यामपट्ट पर लिखने हेतु कहा जावे। जिसकी सर्वाधिक संख्या आवे उसे प्रथम घोषित किया जावे।

(iii) 7, 13, 11 का भाग दिलवाना— जोड़, बाकी, गुणा, भाग, में अभ्यास हेतु यह खेल अत्यन्त उपयोगी है, कोई 3 अंकों की संख्या लिखकर उसके वही 3 अंक पुनः लिखकर 6 अंकों की संख्या बनावे, उसमें क्रमशः 7 और भागफल में 13 का भाग छात्रों से लगवाये, पुनः प्राप्त भागफल में 11 का भाग शिक्षक स्वयं मौखिक रूप से देकर विद्यार्थियों द्वारा पूर्व में लिखी गई तीन अंकों की संख्या का ठीक-ठीक पता लगा सकते हैं। उक्त 6 अंकों की संख्या में 7, 13, 11 का भाग देने पर शेषफल शून्य आना चाहिये यदि नहीं आता है तो विद्यार्थी का उत्तर गलत मानते हुये पुनः भाग देने हेतु कहा जावे। इस प्रकार प्रत्येक छात्र द्वारा उसकी इच्छानुसार 3 अंकों की अलग-अलग संख्या ली जाकर हल कराने का अभ्यास कराया जा सकता है और छात्र स्वयं अपने उत्तर के सही होने की रोचक ढंग से जानकारी कर सकते हैं।

जैसे:-  $567567 \div 13 = 43659$

$43659 \div 7 = 6237$

$6237 \div 11 = 567$

(B) पद्य गणित— प्रसिद्ध भारतीय गणितज्ञ भास्कराचार्य ने लीलावती नामक ग्रन्थ में गणित की विभिन्न पहेलियों को पद्य रूप में लिखा है जैसे—

समीकरण पर आधारित—

1. वर्ग-योग दुइ राशि को गुनिहत्तर सत तीन  
राशि जोग घन तीन कौ कहिवै राशि प्रवीण

हल—  $x$  का वर्ग +  $y$  का वर्ग = 369

$x + y = 27$

उत्तर—  $x = 15, y = 12$

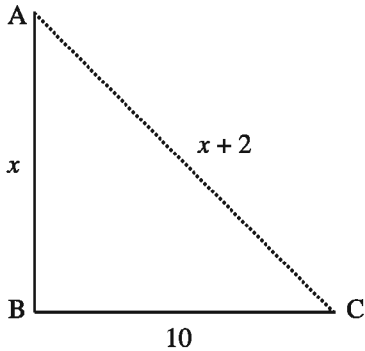
2. आधी कीच तिहाय जल नवम भाग शैवाल,  
एक गज बाहर रही तिला कितो विस्तार।

हल—  $x/2 + x/3 + x/9 + 1 = x$

उत्तर—  $x = 18$  गज

पाइथागोरस प्रमेय पर आधारित-

3. देखा दृष्य बड़ा ही सुन्दर एक गांव के अंदर,  
एक वृक्ष की डाली पर बैठे थे दो बंदर।  
रखे आम दस हाथ दूर पर उसी वृक्ष की जड़ से,  
पहला बंदर कुछ पड़ा उन आमों पर ऊपर से।  
दूजा उतर मूल पर होकर जब आमों पर आया,  
दोनों के चलने में अंतर आठ हाथ का पाया।  
है यह सुन्दर प्रश्न मनोरंजन की है कविताई,  
मित्रो करो विचार वृक्ष की कितनी है ऊंचाई।

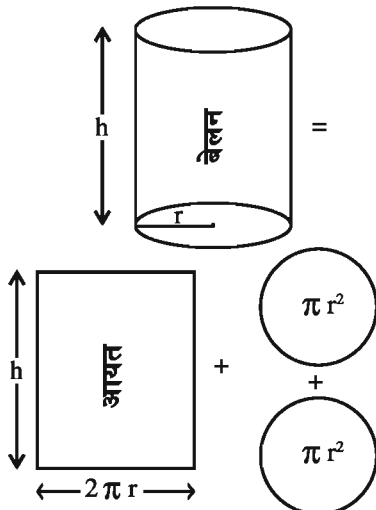


हल :  $x^2 + 10^2 = (x + 2)^2$

या  $x = 24$  हाथ

(C) चित्रों द्वारा गणित शिक्षण- बीज गणित, रेखा गणित के अधिकांश प्रश्नों को चित्रों के माध्यम से ठीक-ठीक समझाया जा सकता है। जैसे-

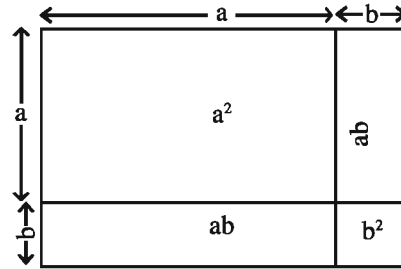
1. बेलन का क्षेत्रफल ज्ञात करना



बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठिय क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल + दो वृत्तों का क्षेत्रफल

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2$$

2.  $(a + b)$  का वर्ग =  $a$  का वर्ग +  $2ab$  +  $b$  का वर्ग  
 $(a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$



(D) कहानियों द्वारा गणित शिक्षण- बालकों को कहानी सुनना अत्यंत प्रिय होता है। गणित की विषयवस्तु सरल ढंग से समझाने हेतु कहानी के रूप में वर्णन कर सकते हैं। जैसे- दो नीम के वृक्षों पर कुछ चिड़िया रहती थीं, पहले वृक्ष की चिड़ियाओं ने दूसरे वृक्ष की चिड़ियाओं से कहा कि यदि तुम्हारे वृक्ष से एक चिड़िया हमारे पास आ जावे तो हम तुम्हारे बराबर हो जावेंगी, दूसरे वृक्ष की चिड़ियाओं ने पहले वृक्ष की चिड़ियाओं से कहा कि यदि तुम्हारे वृक्ष से एक चिड़िया हमारे पास आ जावे तो हम तुम्हारे से तिगुनी हो जावेंगी। बताओ दोनों वृक्षों पर कितनी-कितनी चिड़िया हैं?

हल-  $x + 1 = y - 1$

$3(x - 1) = y + 1$

Ans.  $x = 3, y = 5$

(E) गणितज्ञों की जीवनियां- गणित के शिक्षकों को भारतीय एवं विदेशी गणितज्ञों की जीवनियों का अध्ययन कर समय-समय पर विद्यार्थियों को प्रार्थना-स्थल अथवा कक्षा में सुनाते रहना चाहिये ताकि उनमें गणित के प्रति अभिरुचि पैदा की जा सके। गणितज्ञ रामानुजन, भास्कराचार्य, आर्यभट्ट, न्यूटन, आर्किमिडीज, पाइथागोरस, गौस आदि की जीवनियों से गणित विषय के प्रति आस्था एवं सकारात्मक दृष्टिकोण विकसित होता है। जैसे-रामानुजन प्रो. हार्डी के पास अमेरिका गये हुये थे। एक बार रामानुजन बीमार थे, उन्हें देखने प्रो. हार्डी अस्पताल आये। रामानुजन ने प्रो. हार्डी को कार का नम्बर पूछा तो उन्होंने कहा बड़ा बेतुका नम्बर है 1729। रामानुजन ने कहा यह संख्या अंकगणित की दृष्टि से बड़ी महत्वपूर्ण है। 1729 वह छोटी से छोटी प्राकृत घन संख्या है जिसे 2 संख्याओं के घन के योग के रूप में दो प्रकार से लिखा जा सकता है। (10 का घन + 9 का घन = 1729 तथा 12 का घन + 1 का घन = 1729)। प्रो. हार्डी बीमारी में भी रामानुजन के अंकगणित के ज्ञान को देखकर दंग रह गये।

इसी प्रकार अन्य गणितज्ञों की जीवनियां भी रोचक ढंग से प्रस्तुत की जा सकती हैं।

(F) शिक्षण सहायक सामग्री (TLM) का प्रयोग- गणित के

चार्ट किट, माडल, ज्यामेट्ररी बॉक्स, अवेक्स आदि क्रय करने हेतु विद्यालयों को SSA/RMSA द्वारा प्रतिवर्ष पर्याप्त राशि दी जाती है तथा सेवारत प्रशिक्षणों में उनके उपयोग पर भी पर्याप्त चर्चा की जाती है। कहा गया है—

*A Poor Teacher Tells  
An average Teacher Explains  
A Good Teacher demonstrates  
But a Great Teacher Inspires*

अर्थात् एक अच्छा गणित शिक्षक वही है जो पढ़ाते समय अधिकाधिक प्रदर्शन विधि को काम में लें, छात्रों को अधिकाधिक अभ्यास कार्य हेतु प्रेरित करे। श्यामपट्ट कार्य के साथ-साथ TLM का उपयोग शिक्षण को रुचिकर बनाता है तथा जिस वस्तु को विद्यार्थी मूर्तरूप में देखता है उसे लम्बे समय तक याद रखता है। चार्ट, मॉडल, गणित किट आदि के माध्यम से रोचक ढंग से गणित शिक्षण कराया जा सकता है।

(G) कक्षा कार्य के समय विद्यार्थियों पर व्यक्तिगत ध्यान— गणित शिक्षक का दायित्व है कि प्रत्येक सम्प्रत्यय समझाते समय विद्यार्थियों को पर्याप्त कक्षा कार्य भी करावें, यदि शिक्षक एक सवाल हल करता है तो विद्यार्थियों से भी उसी प्रकार के अन्य प्रश्न कक्षा में हल करवायें। कक्षा कार्य करते समय कक्षा में घूम-घूम कर छात्रों की मदद करें एवं कमियों का दूर करने हेतु निर्देश देते रहें। छात्र-शिक्षक पारस्परिक अन्तःक्रिया शिक्षण को प्रभावी बनाती है। इसके लिये यह भी आवश्यक है कि एक सैक्शन में विद्यार्थियों की संख्या 50-60 से ज्यादा न हो।

(H) प्रतिस्पर्धा की भावना पैदा करना— गणित शिक्षक पढ़ाने के साथ-साथ यूनिट टेस्ट/मासिक टेस्ट एवं उनके सतत् मूल्यांकन से विद्यार्थियों में सकारात्मक प्रतिस्पर्धा पैदा करते रहें। यूनिट/मासिक टेस्ट में श्रेष्ठ उपलब्धि वाले विद्यार्थियों को पुरस्कृत करें एवं कमजोर छात्रों को भी आगे बढ़ने हेतु प्रोत्साहित करते रहें। प्रतिदिन प्रश्नोत्तर प्रक्रिया से छात्रों में विषय के प्रति रुचि एवं लगाव बढ़ाया जा सकता है। विद्यार्थियों को दण्ड कम से कम दिया जावे जबकि प्रोत्साहन, प्रशंसा, पुरस्कार आदि पर अधिक ध्यान दिया जावे।

(I) गणित पहेली/अंकों का जादू/तीलियों की दुनिया/लीलावती गणित, दिमागी कसरत आदि गणित मनोरंजन की पुस्तकों के माध्यम से गणित विषय को रोचक बनाया जा सकता है। विद्यार्थियों में गणितीय अभिवृत्ति में वृद्धि की जा सकती है, तार्किक क्षमता बढ़ायी जा सकती है, विभिन्न पत्रिकाओं, समाचार-पत्रों में आने वाली गणित पहेलियों को हल करने हेतु विद्यार्थियों को प्रोत्साहन, मार्गदर्शन देते रहें। फिर देखिये, बच्चों में गणित के प्रति रुचि उत्पन्न होती है अथवा नहीं। अवश्य उत्पन्न होगी, इसमें कोई शक नहीं है।

—महेश कुमार गर्ग, अति. जिला परियोजना समन्वयक  
राष्ट्रीय माध्यमिक शिक्षा अभियान, धौलपुर

## गणित का महत्व : सूक्तियों में

*यथा शिखा मयूराणां नागानां मणयो यथा।*

*तद्वद् वेदांगशास्त्राणां गणितं मूर्धनि स्थितम्॥*

जैसे मयूरों की शिखाएँ और नागों की मणियाँ सर्वोच्च स्थान पर रहती हैं, उसी प्रकार वेदांग तथा शास्त्रों में गणित सर्वोपरि है। —*याजुष वेदांग ज्योतिष*

Mathematics stands forth as that which unites mediates between man and nature, inner and outer world, thought and perception, as no other subject does.

गणित एक ऐसा विषय है जो एकता स्थापित करता है तथा मनुष्य और प्रकृति, आंतरिक और बाह्य जगत, विचार और प्रत्यक्ष ज्ञान में मध्यस्थता करता है जैसाकि अन्य कोई विषय नहीं करता है। —*फ्रेबेल (हरफोर्ड ट्रान्सलेशन)*

To think the thinkable that is the mathematician's aim. जो कुछ भी चिंतनीय है, उस पर चिंतन किया जाए, यही तो गणितज्ञ का लक्ष्य है। —*सी.टी. केसर (दि युनिवर्स एण्ड बीयांड)*

Mathematics is the priestess of definiteness and clearness.

गणित निश्चयात्मकता और स्पष्टता की पुजारिन है। —*जे.एफ. हर्बर्ट*

Everything that the greatest minds of all times have accomplished towards the comprehension of forms by means of concepts is gathered into one great science, mathematics.

प्रत्ययों के द्वारा रूपों की धारणा की दिशा में हर युग के महत्तम मस्तिष्कों ने जो कुछ प्राप्त कर पाया है वह एक ही महान विज्ञान, गणित में संग्रहित है। —*जे.एफ. हर्बर्ट*

Without mathematics one cannot follow the depths of philosophy; without philosophy one cannot fathom the depths of mathematics; without the two one cannot fathom anything.

गणित के बिना दर्शनशास्त्र की गहराई नहीं नापी जा सकती। दर्शनशास्त्र के बिना गणित की गहराई नहीं नापी जा सकती। दोनों के बिना किसी वस्तु की भी गहराई नहीं नापी जा सकती। —*डेमोक्लिस बोडॉस (ऑन मेथेमेटिक्स एण्ड मैथेटिशियन्स)*

गणितज्ञ फ्रांसीसियों की तरह होते हैं। उनसे कुछ भी कहो, वे उसे अपनी भाषा में अनुदित कर लेते हैं और उसी क्षण बात बिल्कुल भिन्न हो जाती है। —*जेने*

अधिकांश विज्ञानों में एक पीढ़ी पिछली पीढ़ी की निर्मित को नष्ट कर देती है और जो एक पीढ़ी ने स्थापित किया है उसे उन्मूलित कर देती है। गणित ही एक ऐसा विषय है जिसमें हर नई पीढ़ी पिछली निर्मित में एक नई मंजिल जोड़ती जाती है। —*हरमान हैकिल*

लौकिके वैदिके वापि तथा सामायिको पि यः।

बहुभिर्विप्रलापैः किं त्रैलोक्ये सचराचरे।

यत्किञ्चिद्वस्तु तत्सर्वं गणितेन बिना न हि॥

—गणित सार-संग्रह, महावीराचार्य

सांसारिक, वैदिक, धार्मिक आदि सब कार्यों में गणित उपयोगी है। अधिक कहने से क्या लाभ, इस समूचे विश्व में जो कुछ भी चल-अचल है, उन सबका अस्तित्व गणित से पृथक नहीं है।

—संकलनकर्ता : सुनील पंचारिया, कक्षा-11

राज. चौपड़ा उ.मा. विद्यालय, गंगाशहर, बीकानेर-334401

## अंक 9 की रोचक विशेषताएँ

□ डॉ. पूर्णिमा चोपड़ा

1. आप कोई भी संख्या सोचें। अब उस संख्या के अंकों को जोड़ कर योग को संख्या में से घटाने पर प्राप्त शेषफल हमेशा 9 से पूर्णतया विभाजित होगा।

**उदाहरण-** माना संख्या 85 सोची  
संख्या के अंकों का योग :  $8+5 = 13$   
 $85$  में से  $13$  को घटाएँ  $= 85-13 = 72$   
जो 9 से पूर्णतया विभाजित है।

2. कोई भी एक तीन अंकों की एक संख्या (जिसको पलटने पर वह स्वयं नहीं प्राप्त हो 111, 222, ..., 121, 232, 434 आदि को छोड़ कर) सोचें। अब संख्या के अंकों को पलट कर लिखें। अब पुरानी संख्या और नई संख्या के बीच का अंतर ज्ञात करें। अंतर हमेशा 9 से विभाज्य होगा। अंतर के पहले व तीसरे अंक का योग भी हमेशा 9 होगा। इसके अलावा दूसरा अंक 9 होगा।

**उदाहरण-** माना हमने संख्या 678 सोची। अंक पलटने पर : 876, पुरानी व नई संख्या का अंतर ज्ञात करने पर  $876-678 = 198$ , जो 9 से पूर्णतया विभाजित है तथा दूसरा अंक 9 है एवं अन्तर के पहले व तीसरे अंक का योग भी 9 है।

3. यदि हम किसी संख्या को 9 से भाग दें तो प्राप्त शेषफल हमेशा उस संख्या के बीजांक के बराबर होगा।

**उदाहरण :** यदि 2345 को 9 से भाग दें तो शेषफल 5 प्राप्त होगा।

$$\begin{array}{r} 260 \\ 9 \overline{) 2345} \\ \underline{-18} \phantom{00} \\ 54 \\ \underline{-54} \phantom{00} \\ 5 \\ \underline{-0} \phantom{00} \\ 5 \end{array} \quad \leftarrow \text{शेषफल}$$

2345 के अंक का योग = 14

अंत बीजांक =  $1+4 = 5$

4.

$$0 \times 9 + 1 = 1$$

$$1 \times 9 + 2 = 11$$

$$12 \times 9 + 3 = 111$$

$$123 \times 9 + 4 = 1111$$

$$1234 \times 9 + 5 = 11111$$

$$12345 \times 9 + 6 = 111111$$

$$123456 \times 9 + 7 = 1111111$$

$$1234567 \times 9 + 8 = 11111111$$

$$12345678 \times 9 + 9 = 111111111$$

$$123456789 \times 9 + 10 = 1111111111$$

5.

$$0 \times 9 + 8 = 8$$

$$9 \times 9 + 7 = 88$$

$$98 \times 9 + 6 = 888$$

$$987 \times 9 + 5 = 8888$$

$$9876 \times 9 + 4 = 88888$$

$$98765 \times 9 + 3 = 888888$$

$$987654 \times 9 + 2 = 8888888$$

$$9876543 \times 9 + 1 = 88888888$$

$$98765432 \times 9 + 0 = 888888888$$

6.

$$12345679 \times 9 = 111111111$$

$$12345679 \times 18 = 222222222$$

$$12345679 \times 27 = 333333333$$

$$12345679 \times 36 = 444444444$$

$$12345679 \times 45 = 555555555$$

$$12345679 \times 54 = 666666666$$

$$12345679 \times 63 = 777777777$$

$$12345679 \times 72 = 888888888$$

$$12345679 \times 81 = 999999999$$

7.

$$2 \times 9 = 18$$

$$22 \times 9 = 198$$

$$222 \times 9 = 1998$$

$$2222 \times 9 = 19998$$

$$22222 \times 9 = 199998$$

$$222222 \times 9 = 1999998$$

$$2222222 \times 9 = 19999998$$

8.

$$3 \times 9 = 27$$

$$33 \times 9 = 297$$

$$333 \times 9 = 2997$$

$$3333 \times 9 = 29997$$

$$33333 \times 9 = 299997$$

$$333333 \times 9 = 2999997$$

$$3333333 \times 9 = 29999997$$

9.

$$4 \times 9 = 36$$

$$44 \times 9 = 396$$

$$444 \times 9 = 3996$$

$$4444 \times 9 = 39996$$

$$44444 \times 9 = 399996$$

$$444444 \times 9 = 3999996$$

$$4444444 \times 9 = 39999996$$

10.

$$5 \times 9 = 45$$

$$55 \times 9 = 495$$

$$555 \times 9 = 4995$$

$$5555 \times 9 = 49995$$

$$55555 \times 9 = 499995$$

$$555555 \times 9 = 4999995$$

$$5555555 \times 9 = 49999995$$

11.

$$6 \times 9 = 54$$

$$66 \times 9 = 594$$



$$\begin{aligned} 666 \times 9 &= 5994 \\ 6666 \times 9 &= 59994 \\ 66666 \times 9 &= 599994 \\ 666666 \times 9 &= 5999994 \\ 6666666 \times 9 &= 59999994 \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned} 7 \times 9 &= 63 \\ 77 \times 9 &= 693 \\ 777 \times 9 &= 6993 \\ 7777 \times 9 &= 69993 \\ 77777 \times 9 &= 699993 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 777777 \times 9 &= 6999993 \\ 7777777 \times 9 &= 69999993 \end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned} 7 \times 9 &= 63 \\ 77 \times 99 &= 7623 \\ 777 \times 999 &= 776223 \\ 7777 \times 9999 &= 77762223 \\ 77777 \times 99999 &= 7777622223 \\ 777777 \times 999999 &= 777776222223 \end{aligned}$$

14.

$$\begin{aligned} 8 \times 9 &= 72 \\ 88 \times 99 &= 8712 \\ 888 \times 999 &= 887112 \\ 8888 \times 9999 &= 88871112 \\ 88888 \times 99999 &= 8888711112 \\ 888888 \times 999999 &= 888887111112 \\ 8888888 \times 9999999 &= 88888871111112 \end{aligned}$$

—रीडर, गणित विभाग  
मरुधर इन्जीनियरिंग कॉलेज, बीकानेर

गणित प्राकृतिक दुनिया में होने वाली घटनाओं पर एक बेहतर परिप्रेक्ष्य पाने के लिए एक महत्वपूर्ण विषय है। त्रिकोणमिति एक गणितीय और ज्यामितीय तर्क का विशिष्ट क्षेत्र है। जिसमें त्रिभुजों के गुणों का अध्ययन किया जाता है। यह सच है कि त्रिभुज एक सरल ज्यामितीय आकृति है फिर भी इसके विभिन्न अनुप्रयोग हैं। त्रिकोणमिति का प्रारम्भिक अनुप्रयोग ऊँचाई एवं दूरी मापने में किया जाता है।

जहाजरानी तकनीक में त्रिकोणमिति का इस्तेमाल किया जाता है। विशेष रूप से उपग्रह प्रणालियों, खगोल विज्ञान, नौ सेना और विमानन उद्योग, समुद्र विज्ञान, भूमि सर्वेक्षण और मानचित्रकारी में भी त्रिकोणमिति के सिद्धान्तों का उपयोग बहुतायत में किया जाता है। त्रिकोणमिति हमारे वास्तविक जीवन से बहुत सम्बन्धित है। हम जीवन की कई गतिविधियों में त्रिकोणमिति का प्रयोग करते हैं।

जिन क्षेत्रों में त्रिकोणमिति का प्रयोग होता है क्या हम उनका पता लगा सकते हैं। हमें इनका उपयोग समझने के लिए विभिन्न प्रकार की समस्याओं का सामना करना पड़ता है तथा यह पता लगाने की संभावना कम ही होती है कि हम सीधे-सीधे किसी व्यावहारिक मुद्दे को सुलझाने के लिए त्रिकोणमिति के सिद्धान्त लागू करें।

विज्ञान की एक मौलिक पृष्ठभूमि का क्षेत्र है— संगीत जो कई लोगों के लिए जुनून भी है। उसमें भी त्रिकोणमिति का उपयोग होता है। संगीत की लहरों व धुनों में भी साइन तरंग व

कोसाइन तरंग का उपयोग होता है। परन्तु एक संगीतकार व सुनने वाला यह नहीं समझ पाता है कि इसमें कहीं त्रिकोणमिति का प्रयोग हो रहा है अथवा नहीं? कम्प्यूटर भी संगीत के विकास में उपयोगी है। कम्प्यूटर के विभिन्न घटक संगीत की रचना करते समय गणितीय प्रतिनिधित्व करते हैं क्योंकि कम्प्यूटर भी गणितीय सिद्धान्तों पर कार्य करता है। ध्वनि इंजीनियर व प्रौद्योगिकीविद कम्प्यूटर संगीत में अनुसंधान कार्य करते हैं तो उसमें त्रिकोणमिति की आधारभूत संकल्पनाओं का प्रयोग किया जाता है।

## त्रिकोणमिति का महत्व

□ राधाकृष्ण बिश्नोई

आधुनिक वास्तुकला में त्रिकोणमिति को सहायक माना जाता है। इस्पात, पत्थर और काँच में खूबसूरती, घुमावदार सतहों का निर्माण इस विज्ञान के युग में असंभव तो नहीं है। परन्तु वास्तव में यह कार्य त्रिकोणमिति के आधार पर ही किया जाता है।

डिजिटल फोटोग्राफी भी एक अद्भुत विज्ञान है तथा यह वास्तविक जीवन में काम में आता है। जटिल कल्पना की कम्प्यूटर पीढ़ी ज्यामितीय पैटर्न पर आधारित है जिससे सटीक स्थान व छवि के अनन्त बिन्दुओं में से प्रत्येक के रंग को परिभाषित करना संभव हुआ है।

इमेजिंग तकनीक का उपयोग आजकल चिकित्सा क्षेत्र में बहुतायत में होता है जिसमें त्रिकोणमिति की अवधारणाएँ लागू की जाती हैं। चिकित्सा क्षेत्र में काम आने वाली MRI व CT Scan इत्यादि भी गणित के सिद्धान्तों पर कार्य करती है जिससे द्यूमर का पता लगाया जाता है तथा लेजर से उपचार किया जाता है। इसके अलावा हम घर व आसपास के कामों में भी त्रिकोणमिति का उपयोग करते हैं। उदाहरण के लिए हमें अपने घर को पुनः व्यवस्थित करने की आवश्यकता है तो इसके लिए हम उचित कोणों का ध्यान रखेंगे। प्रकाश व्यवस्था का ध्यान रखेंगे। हालांकि इन सब कार्यों में साइन का कोसाइन के सूत्रों की आवश्यकता नहीं पड़ेगी। फिर भी अपने अध्ययन मेज पर फैशनेबल दीपक रखने में हमें त्रिकोणमिति के बुनियादी कोणों के गुणों का प्रयोग करना पड़ता है। त्रिकोणमिति का उपयोग पहाड़ों की ऊँचाइयों को मापने के लिए किया जाता है। पहाड़ों की ऊँचाइयों का ज्ञान होना विमानन व जहाजरानी के लिए अत्यन्त आवश्यक है तथा यह जानकारी पर्यटकों के लिए बहुत काम की हो सकती है। ताकि पर्यटक हिल-स्टेशनों की ऊँचाई पहले से जान सकें। कई लोगों को डॉक्टर ज्यादा ऊँचाई वाले स्थानों पर जाने से मना करते हैं। जिससे उनके स्वास्थ्य को कोई नुकसान न हो। इसलिए भी पहाड़ों की वास्तविक ऊँचाई का ज्ञान होना अत्यन्त आवश्यक है।

—सहायक प्रोफेसर, गणित विभाग  
मण्डा इंस्टीट्यूट ऑफ टेक्नोलॉजी, बीकानेर

प्रतिध्वनि

## गणित की जय जय

“गणित और रामानुजन दोनों का स्मरण एक दूसरे को महिमामय बनाता है। गणित के कारण रामानुजन प्रकाश में आए और अपने गहन गणित ज्ञान के कारण रामानुजन गणित को उच्च स्थान दिला पाने में सफल रहे। अतः इस अवसर पर गणित तथा रामानुजन दोनों की जय जय।”

गणित के गौरव को स्मरण कर उससे प्रेरणा लेने तथा उसमें और वृद्धि करने के मंगलभाव के साथ वर्ष 2012 को भारत में गणित वर्ष के रूप में मनाया जाना निश्चय ही एक सराहनीय कदम है। महापुरुषों के यशस्वी योगदान की कीर्ति पताकाएँ हर युग में फहराती रही हैं। इन्हीं महापुरुषों की शृंखला में महान भारतीय गणितज्ञ श्रीनिवास रामानुजन का नाम बड़ी श्रद्धा व सम्मान के साथ लिया जाता है। इन्हीं रामानुजन सर के 125वें जयन्ती वर्ष को भारत में गणित वर्ष के रूप में समारोहित किए जाने का निर्णय भारत सरकार द्वारा किया गया जिसकी औपचारिक शुरुआत 26 फरवरी 2012 के दिन मद्रास विश्वविद्यालय में आयोजित एक समारोह में माननीय प्रधानमंत्री डॉ. मनमोहन सिंह ने की थी। साथ ही केन्द्रीय मानव संसाधन मंत्री की अध्यक्षता में एक आयोजन समिति का भी गठन किया गया।

यह संयोग भी शकुन भरा है कि विश्वपटल पर नाइजीरिया में भी वर्ष 2012 को गणित वर्ष के रूप में मनाया जा रहा है। नाइजीरिया में यह आयोजन गणित को लोकप्रिय बनाने के उद्देश्य से किया जा रहा है। जबकि हमारे यहाँ एस. रामानुजन के 125वें जन्मवर्ष के उपलक्ष्य में यह राष्ट्रीय अनुष्ठान रचा गया है। कुछ भी हो, आयोजन के पीछे रहा मंगल मंतव्य तो गणित का उन्नयन करना ही है। इतना ही नहीं, प्रधानमंत्री जी द्वारा की गई घोषणा के अनुसार भारत में तो अब प्रतिवर्ष 22 दिसम्बर का दिन राष्ट्रीय गणित दिवस के रूप में मनाया जाएगा। यह उल्लेखनीय है कि 22 दिसम्बर रामानुजन का जन्मदिन है।

गणित का महत्व बता पाना बहुत मुश्किल है। गणित भाषा और क्षेत्र से परे है। गणित को लेकर कहीं-कभी कोई विवाद सुनने को नहीं मिलता। हिन्दी, अंग्रेजी अथवा और कोई भी भाषा हो, मगर उनमें आने वाले अंकों और गणितीय क्रियाओं की एक ही भाषा है। गणित सार्वभौमिक, सार्वकालिक एवं सर्वहितैषी है। यही कारण है कि उसे वेदांग शास्त्रों में मयूरों की शिखाओं तथा नागों की मणियों जैसी उच्च उपमा से मंडित किया गया है। महान दार्शनिक फ्रेबेल ने गणित को एकता और अखण्डता स्थापित करने वाली बताते हुए कहा है, “गणित एक ऐसा विषय है जो एकता स्थापित करता है तथा मनुष्य और प्रकृति, आन्तरिक और बाह्य जगत विचार और प्रत्यक्ष ज्ञान में मध्यस्थता करता है जैसाकि अन्य कोई विषय नहीं करता।”

गणित और रामानुजन दोनों का स्मरण एक दूसरे को महिमामय बनाता है। गणित के कारण रामानुजन प्रकाश में आए और अपने गहन गणित ज्ञान के कारण रामानुजन गणित को उच्च स्थान दिला पाने में सफल रहे। रामानुजन के योगदान से विश्वपटल पर भारत को मिली प्रतिष्ठा का आप अंदाज लगा सकते हैं। अतः इस अवसर पर गणित तथा रामानुजन दोनों की जय जय। अब प्रतिवर्ष 22 दिसम्बर का दिन राष्ट्रीय गणित दिवस के रूप में मनाया जाएगा जो निश्चय ही गणित के विकास विस्तार की दिशा में अहम भूमिका निभाएगा।

कदाचित यह संयोग ही है कि वर्ष 2012 को नाइजीरिया में गणित वर्ष के रूप में मनाया जा रहा है। वे इसका कारण अपने देश में गणित को लोकप्रिय बनाने के लिए वातावरण बनाना बता रहे हैं। कुछ भी हो गणित के प्रति सकारात्मक माहौल बनने की दिशा में ये प्रयास निश्चय ही कारगर सिद्ध होंगे। गणित को जीवन मूल्यों और संस्कारों से जोड़ने का सद्प्रयास भी हमें करना चाहिए।

शिविरा के गणित विशेषांक के लिए हमारे आग्रह पर मानजोग गणित पंडितों ने महत्वपूर्ण आलेख भिजवाने की हमारे पर कृपा की जिसके लिए हम उन सबके प्रति अनुगृहीत है। शिविरा की सहयोगी पत्रिका नया शिक्षक (Teacher Today) के अक्टूबर-दिसम्बर, 2012 अंक में भी गणित विषय पर महत्वपूर्ण आलेख दिए जाएँगे। इनमें राजस्थान के मूर्धन्य गणितज्ञ डॉ. के.सी. गुप्ता का आलेख एवं माननीय प्रधानमंत्री का भाषण निश्चय ही शिक्षकों एवं छात्र-छात्राओं के लिए अत्यन्त उपयोगी एवं संग्रहणीय सिद्ध होंगे। गणित विशेषांक को इतने उपयोगी रूप में प्रकाशित कर पाने में कदम-कदम पर हमारा मार्गदर्शन एवं सहयोग प्रदान करने के लिए हम गणितश्री, हमारे अपने डॉ. के.डी. शर्मा के प्रति अपना विनम्र आभार प्रकट करते हैं।

—ओमप्रकाश सारस्वत, वरिष्ठ सम्पादक  
E-mail: opsaraswat58@gmail.com

प्रकाशक, मुद्रक, सम्पादक डॉ. वीना प्रधान द्वारा डिपार्टमेंट ऑफ एज्युकेशन गवर्नमेंट ऑफ राजस्थान, बीकानेर के लिए माध्यमिक शिक्षा, राजस्थान, बीकानेर-334011 से प्रकाशित एवं कोटावाला ऑफसेट, 82, सुदर्शनपुरा, इण्डस्ट्रियल एरिया, जयपुर से मुद्रित। © प्रधान सम्पादक : डॉ. वीना प्रधान